GEOMETRÍA

ENTES GEOMÉTRICOS FUNDAMENTALES

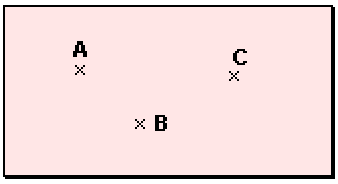
La geometría se basa en tres conceptos fundamentales que se aceptan sin definirlos y que forman parte del **espacio geométrico**. Estos elementos son:

PUNTO:

Es el elemento más importante de él se derivan los otros elementos fundamentales: la línea y el plano.

Es la unidad indivisible de la geometría, no tiene dimensión (largo, alto, ancho). Se dice que el punto tiene posición en el espacio, pero no extensión.

Cada punto es un elemento del espacio geométrico y lo designaremos con una letra imprenta mayúscula y se representa con un pequeño círculo o cruz.



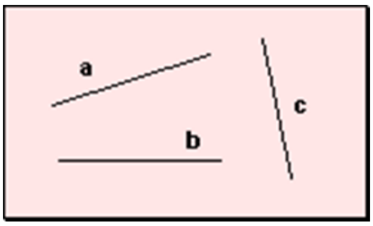
LÍNEA:

Es una figura geométrica que se genera por un punto en movimiento. Tiene una sola dimensión. Cada recta es un conjunto de puntos alineados; la designaremos con una letra minúscula imprenta. Una recta no tiene ni origen ni fin.

Una línea puede extenderse en forma ilimitada y puede ser: recta, curva o combinada (mixta).

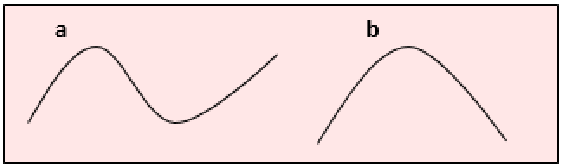
LÍNEA RECTA:

Es una figura geométrica que se genera cuando una sucesión puntos se mueve sin cambiar de dirección. Se describe como la presentación gráfica de las infinitas posiciones de un punto que se mueve siempre en la misma dirección. La recta es la línea más corta que puede trazarse entre dos puntos.



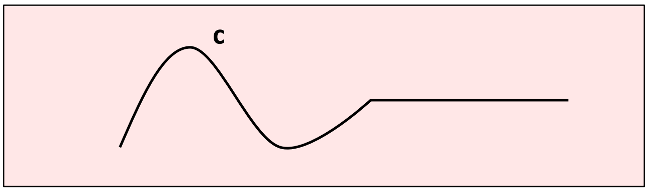
LÍNEA CURVA:

Es una figura geométrica dada por una sucesión de puntos que cambian continuamente de dirección.



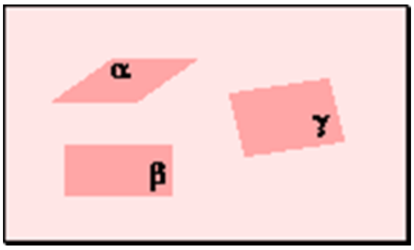
LÍNEA MIXTA:

Es una figura geométrica dada por una sucesión de puntos, que combinan en un solo trazo líneas curvas y líneas rectas.



PLANO:

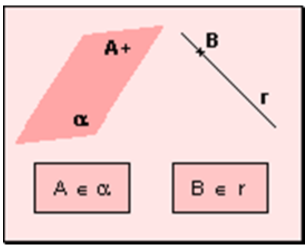
Un plano es una superficie que tiene largo y ancho pero no espesor, por lo tanto tiene 2 dimensiones. Se representa con una porción del mismo y se lo designa con una letra del alfabeto griego.



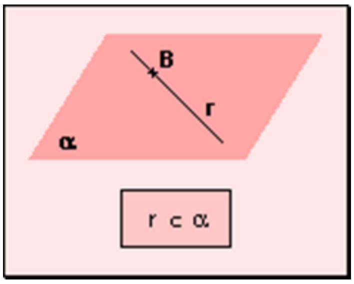
RELACIONES FUNDAMENTALES

Los tres conceptos anteriores están relacionados a través de las relaciones de pertenencia e inclusión:

- Los puntos pertenecen a las rectas y los planos.



- Las rectas **están incluidas** en los planos.



POSTULADOS

Se llaman postulados a aquellas propiedades que satisfacen los elementos geométricos que se aceptan sin demostrar y que surgen de la simple observación.

1. Existen infinitos puntos, infinitas rectas e infinitos planos.

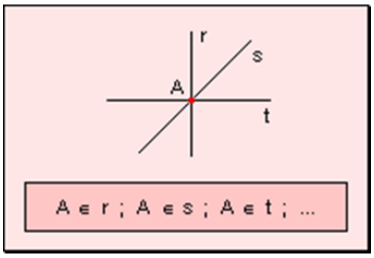
$\exists \; A \,;\, B \,;\, C \,;\, D \,;\, \ldots$

$\exists \; a \,;\, b \,;\, c \,;\, d \,;\, \ldots$

$\exists \; \alpha \,;\, \beta \,;\, \gamma \,;\, \delta \,;\, \ldots$

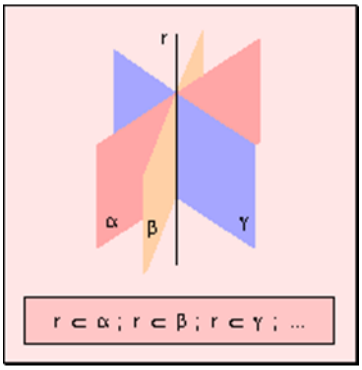
2. Todo punto pertenece a infinitas rectas, ya que por un punto pasan infinitas rectas.

   El conjunto de rectas que concurren en un punto se denomina haz de rectas.

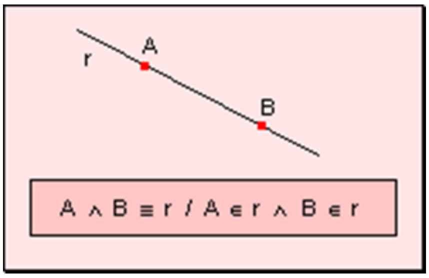


3. Toda recta está incluida en infinitos planos ya que por una recta pasan infinitos planos.

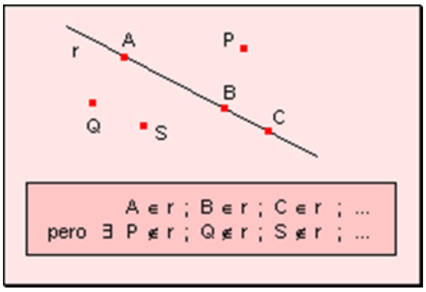
   El conjunto de planos que pasa por una recta se denomina haz de planos.



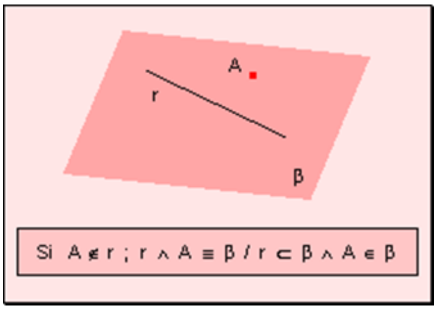
4. Dos puntos determinan una y sólo una recta a la cual pertenecen.



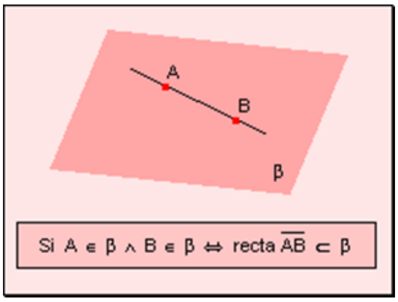
5. A una recta pertenecen infinitos puntos y existen también infinitos puntos que no pertenecen a ella.



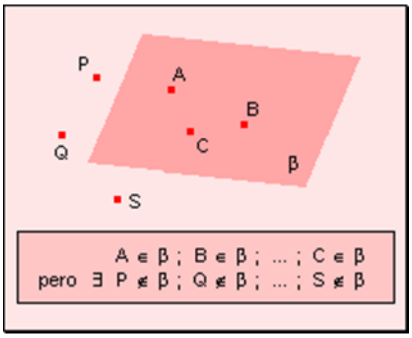
6. Una recta y un punto fuera de ella determinan un plano de modo que el punto pertenece al mismo y la recta está incluida en él.



7. La recta determinada por dos puntos de un plano está incluida a dicho plano. También puede enunciarse como: Dos puntos incluidos en un plano determinan una recta que está incluida en el plano.



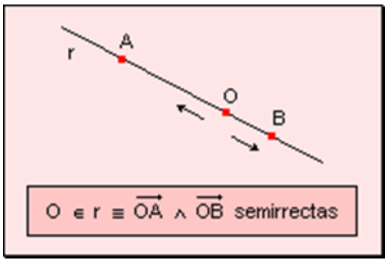
8. A un plano pertenecen infinitos puntos y existen también infinitos puntos que no pertenecen a ella.



ELEMENTOS GEOMÉTRICOS EN EL PLANO

SEMIRRECTA

Es un conjunto infinito de puntos, que está limitado por uno de sus extremos; tiene principio pero no fin. Si marcamos nuestra recta definiendo sólo un punto inicial, entonces tenemos una semirrecta. El punto O, divide nuestra recta en dos partes, formando dos semirrectas. Es importante saber que el punto O, no pertenece a las semirrectas, sino es sólo la frontera entre las dos semirrectas. Se denomina origen al punto O que da lugar a dos semirrectas opuestas.

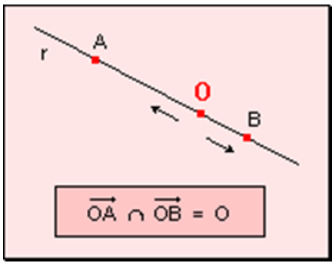


Para diferenciar las semirrectas, se determinan2 puntos adicionales, cada uno de los cuales pertenece a cada semirrecta:

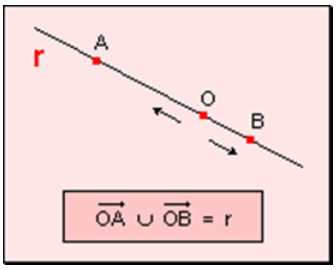
- Semirrecta de origen O que pasa por el punto A.
- Semirrecta de origen O que pasa por el punto B.

CARACTERÍSTICAS DE LAS SEMIRRECTAS

- Todo punto de una recta pertenece a una de las dos semirrectas o coincide con el origen.
- La intersección de dos semirrectas opuestas es el punto de origen.



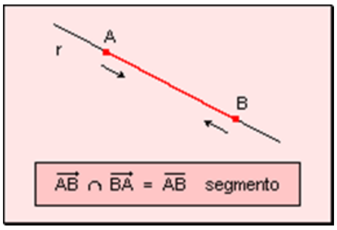
- La unión de dos semirrectas opuestas es toda la recta.



SEGMENTOS

Dados dos puntos A y B, se llama **segmento** a la intersección de la semirrecta de origen A que contiene al punto B y la semirrecta de origen B que contiene al punto A.

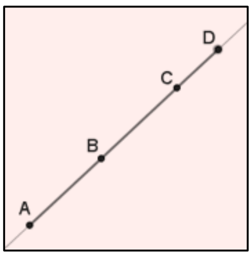
Los puntos A y B se denominan **extremos** del segmento.



TIPOS DE SEGMENTOS

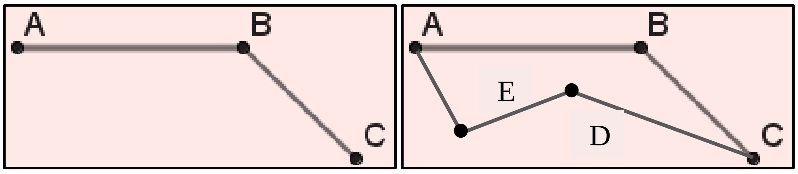
- **Segmentos Consecutivos:**

Dos segmentos son consecutivos cuando tienen un extremo en común. y ningún otro punto en común fuera de éste.
Pueden ser:
1- Alineados o colineales.



2- No colineales, determinando una poligonal.

Los segmentos consecutivos no colineales, llamados **poligonal,** pueden ser abiertos o cerrados según tengan o no extremos comunes el primer y el último segmento que lo forman. Las poligonales cerradas forman polígonos.



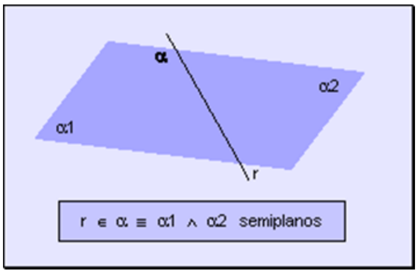
Poligonal abierta Poligonal cerrada

- **Segmento nulo:**

Un segmento es nulo cuando sus extremos coinciden. Ejemplo: un punto

SEMIPLANO

Toda recta perteneciente a un plano separa al mismo en dos porciones, cada uno de ellos recibe el nombre de semiplano. A la recta que da lugar a los dos semiplanos se la llama frontera o recta de división.



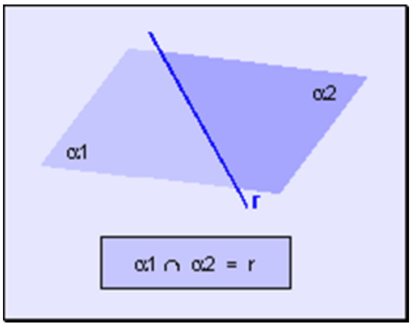
Para diferenciar los semiplanos se determinan dos puntos adicionales, cada uno de los cuales pertenece a cada semiplano:

- Semiplano respecto a la recta r que contiene al punto A.
- Semiplano respecto a la recta r que contiene al punto B.

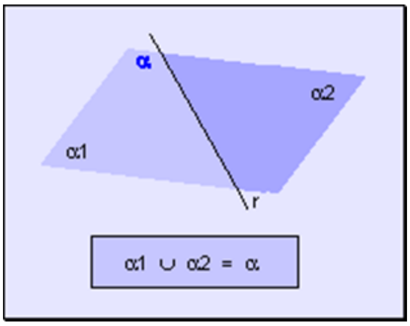
PROPIEDADES DE LOS SEMIPLANOS

Se observa que:

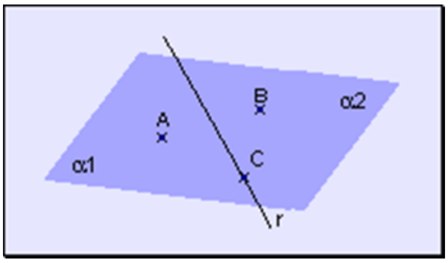
- La intersección de dos semiplanos determinados por una recta es la recta de división.



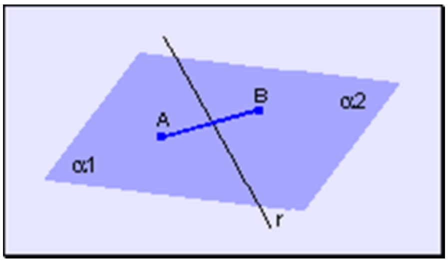
- La unión de dos semiplanos determinados por una recta es todo el plano.



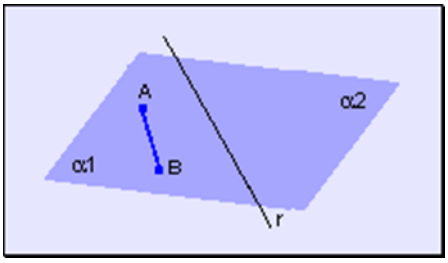
- Todo punto de un plano pertenece a uno de los dos semiplanos o a la recta de división.



- Todo segmento determinado por dos puntos de distintos semiplanos corta a la recta de división.

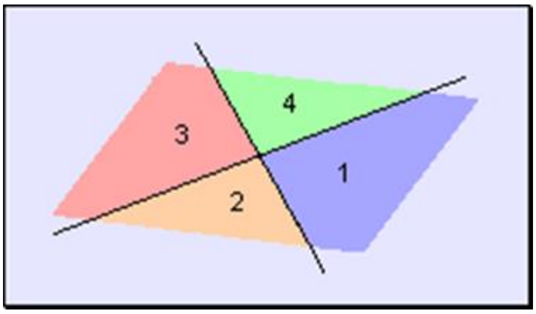


- Todo segmento determinado por dos puntos del mismo semiplano no corta a la recta de división.



ÁNGULOS

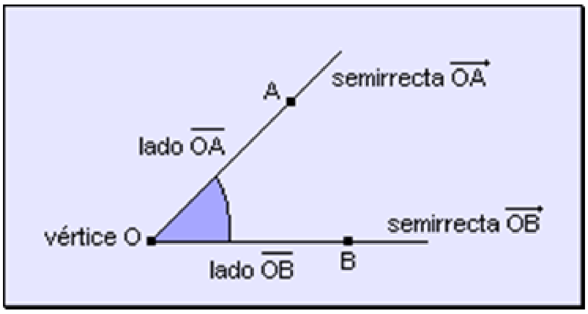
Cuando dos rectas se cortan, forman en el plano 4 regiones llamadas **ángulos**.



IDENTIFICACIÓN DE UN ÁNGULO

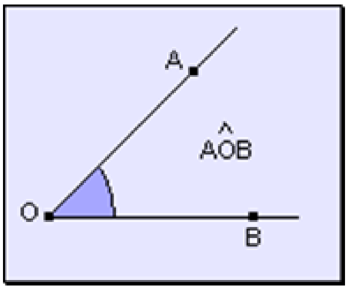
Por lo tanto, un ángulo es la porción de plano delimitado por dos semirrectas del mismo origen, sus elementos son:

- **Un vértice:** punto de origen de las dos semirrectas que lo forman.
- **Dos lados:** semirrectas cuyo origen forma el vértice del ángulo.

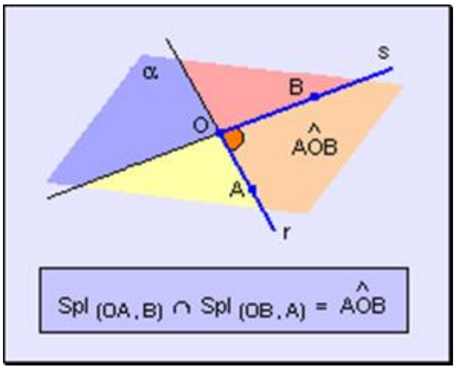


Los ángulos se identifican por tres letras donde:

- La letra central corresponde al vértice.
- Las otras dos letras son puntos cualesquiera de las semirrectas que lo forman.

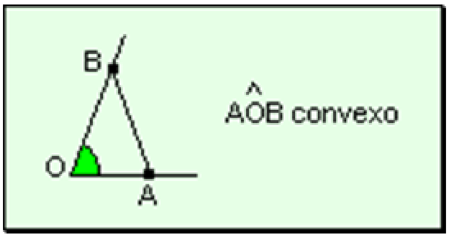


Dados dos planos se llama ángulo **convexo** $\hat{AOB}$ a la **intersección** del semiplano respecto de la recta $\overline{OA}$ que contiene al punto B y el semiplano respecto a la recta $\overline{OB}$ que contiene al punto A.



ÁNGULO CONVEXO:

Un ángulo convexo es aquel en el cual, al trazar un segmento uniendo dos puntos cualesquiera de sus lados, el segmento se encontrará dentro del ángulo.



Los ángulos convexos se clasifican en:

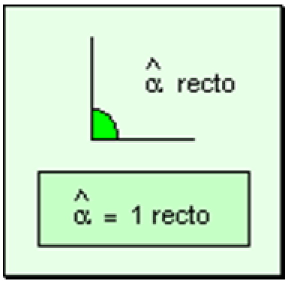
- **Agudos**
- **Rectos**
- **Obtusos**
- **Llanos**

ÁNGULO AGUDO

Un ángulo agudo tiene una abertura menor a la del ángulo recto.

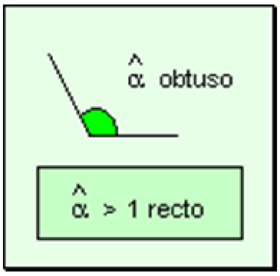
ÁNGULO RECTO

Un ángulo recto es aquel formado por el cruce de dos rectas perpendiculares.



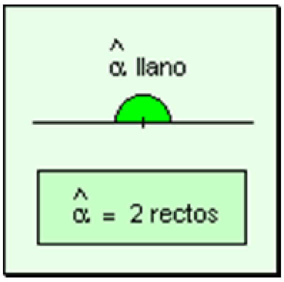
ÁNGULO OBTUSO

Un ángulo obtuso tiene una abertura mayor a la del ángulo recto.



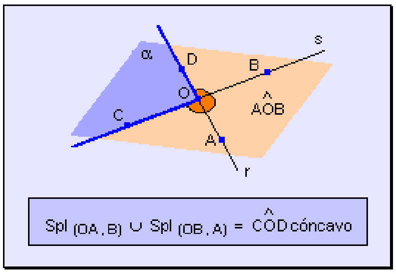
ÁNGULO LLANO

Un ángulo llano es aquel cuyos lados son semirrectas opuestas.Todo ángulo llano es igual a dos rectos.

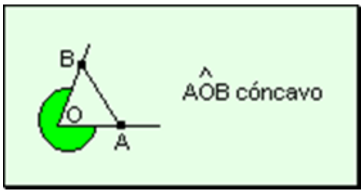


ÁNGULO CÓNCAVO

Si en cambio, se considera la **unión** de los dos semiplanos queda determinado un ángulo **cóncavo**. Si se suprime un ángulo convexo del plano, lo que queda es un ángulo cóncavo.

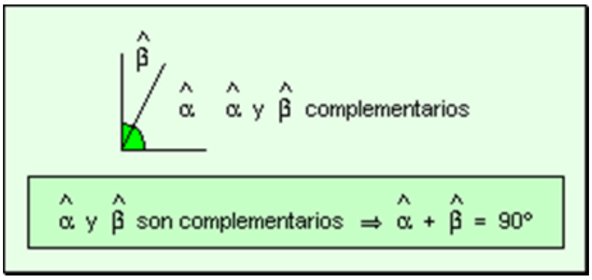


Un ángulo cóncavo es aquel en el cual, al trazar un segmento uniendo dos puntos cualesquiera de sus lados, el segmento se encontrará fuera del ángulo. Los ángulos cóncavos son mayores que un llano.



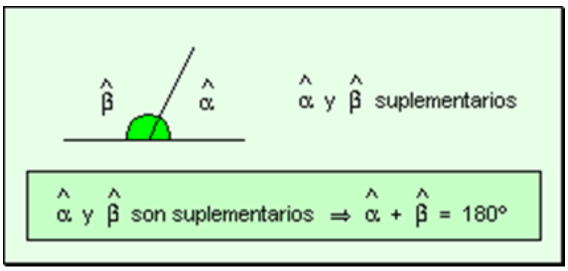
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus amplitudes da como resultado un recto.



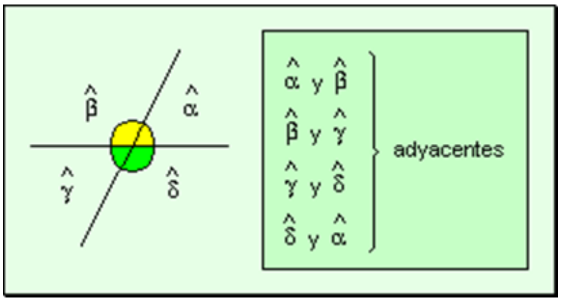
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus amplitudes da como resultado un llano.



ÁNGULOS ADYACENTES

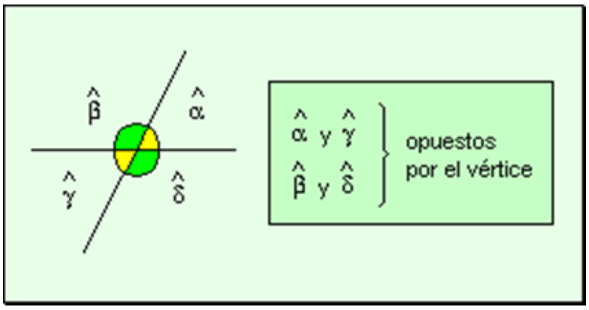
Dos ángulos son adyacentes cuando tienen un lado en común y el otro lado está formado por dos semirrectas opuestas.



- Los ángulos adyacentes son siempre **suplementarios**, ya que su suma es igual a un llano.
- Si dos ángulos adyacentes son iguales, ambos son ángulos rectos.

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

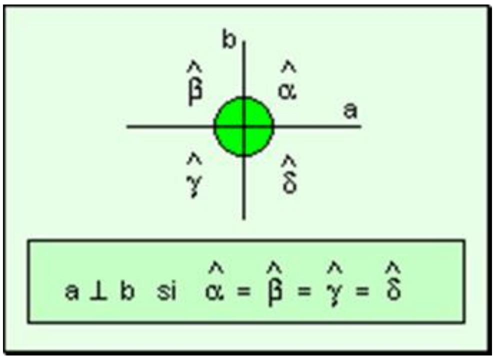
Dos ángulos son opuestos por el vértice cuando tienen un vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas.



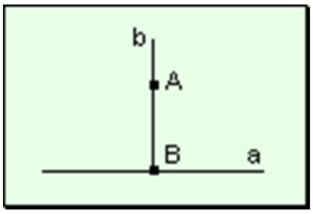
Los ángulos opuestos por el vértice son **iguales**.

RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son **perpendiculares** cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales.



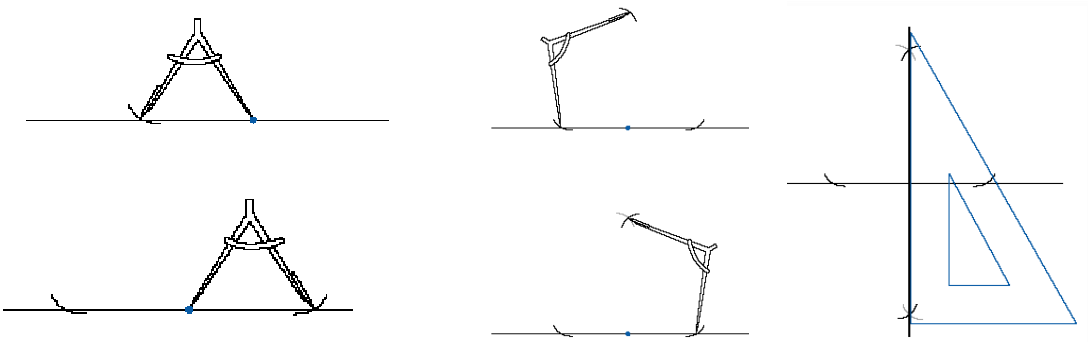
Dado un punto perteneciente a una recta o exterior a ella, por él pasa una y sólo una perpendicular a dicha recta.



El trazado de perpendiculares puede efectuarse de las siguientes formas:

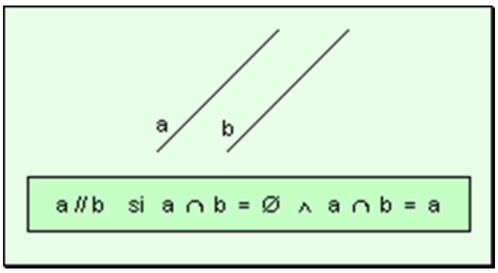
- **Con escuadra**, por un punto perteneciente a la recta o exterior a la misma.

- **Con compás**, por un punto perteneciente a la recta o exterior a la misma.

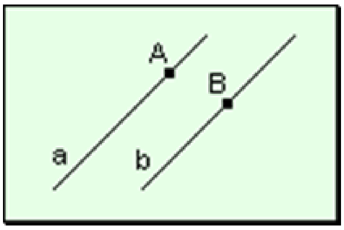


RECTAS PARALELAS

Dos rectas son **paralelas** cuando no tienen ningún punto en común, o cuando son coincidentes. La distancia entre ellas es siempre la misma.

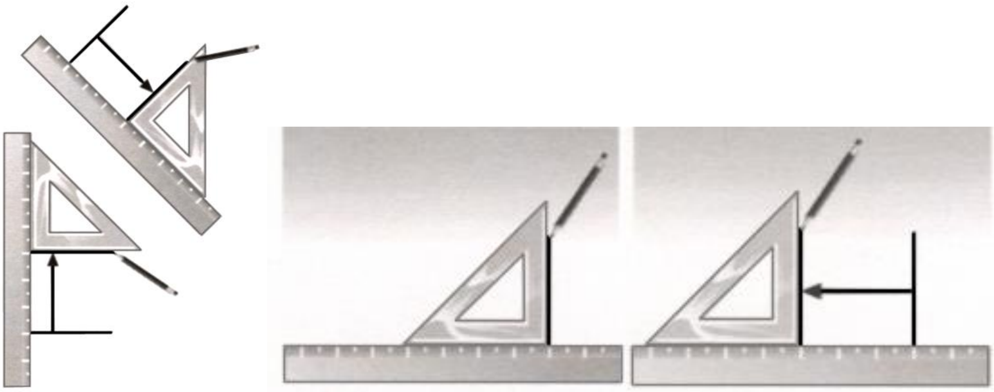


Dado un punto perteneciente a una recta o exterior a ella, por él pasa una y sólo una paralela a dicha recta.



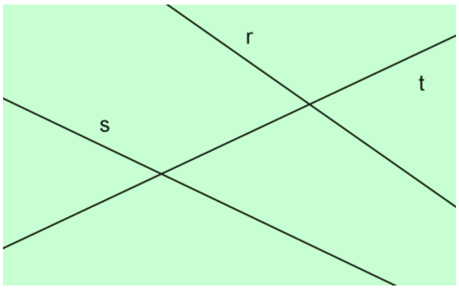
El **trazado de paralelas** puede efectuarse de las siguientes formas:

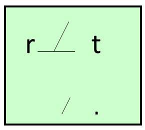
- **Con regla y escuadra**



RECTAS OBLICUAS

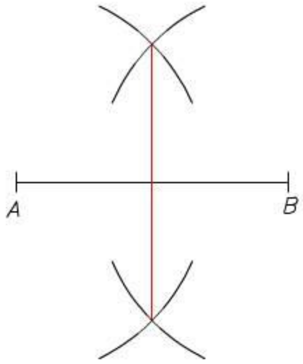
Dos rectas son oblicuas cuando se cortan entre sí y forman ángulos diferentes a 90°.

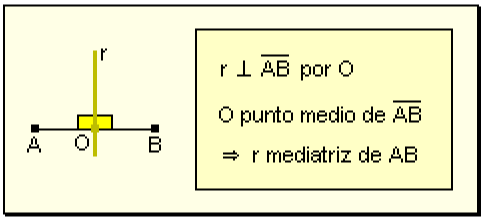




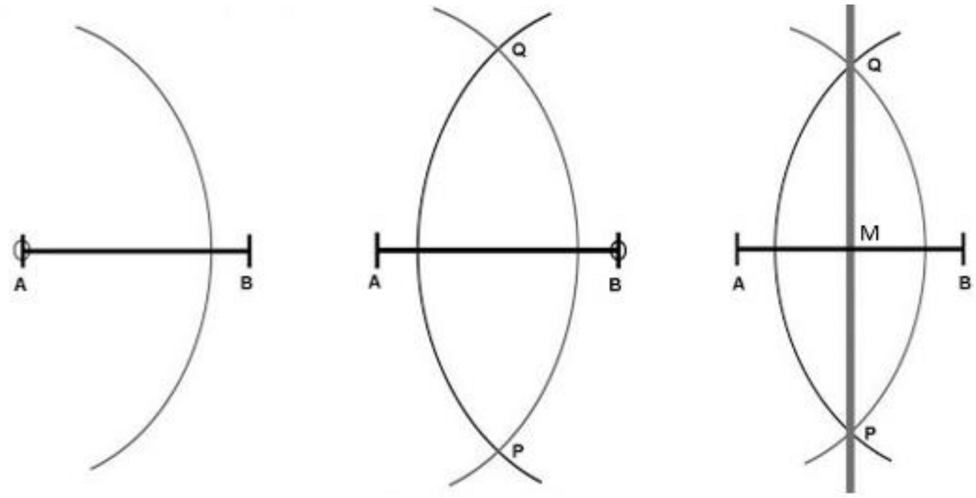
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Se llama **mediatriz** de un segmento a la recta perpendicular que lo divide en dos segmentos iguales. Por lo tanto, la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.





PASOS PARA TRAZAR LA MEADIATRIZ DE UN SEGMENTO



1° Para trazar la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, se toma el compás con centro en el punto **A** y radio mayor que la mitad del segmento dado y se traza un arco de circunferencia.

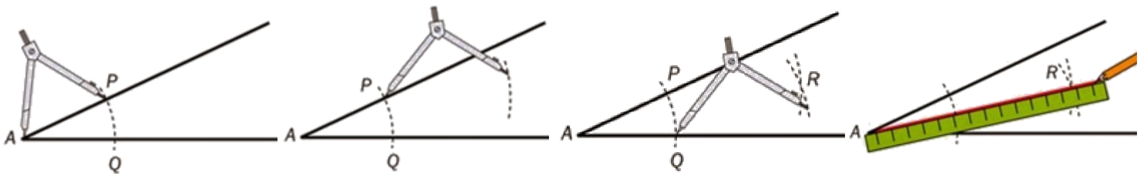
2° Luego, sin modificar la abertura del compás, se repite el procedimiento con centro en el punto **B**. La intersección de los dos arcos de circunferencia determinan los puntos **Q** y **P**

Para finalizar, se dibuja la recta que pasa por las intersecciones de dichos puntos y obtenemos la mediatriz $\overline{PQ}$ del segmento dado.
La intersección de la mediatriz con el segmento $\overline{AB}$ determina el punto medio **M**

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Se llama **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales. Por lo tanto, la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

PASOS PARA DIBUJAR LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO



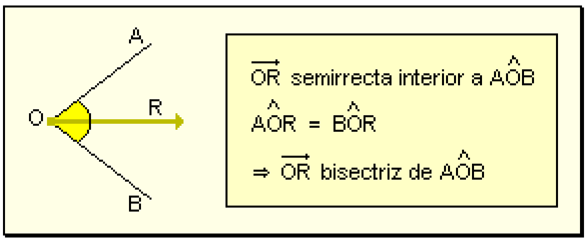
1° Trazar con el compás un arco con centro en el punto **A**. Llamaremos **P** y **Q** a los puntos de corte del arco con los lados del ángulo dado.

2° Abre el compás y traza un arco con centro en el punto **P.**

Sin mover la abertura del compás y con centro en **Q** traza otro arco. Este arco se corta con el arco del paso 2, en el punto **R.**

Traza la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo **A** y por el punto **R**. Esta semirrecta es la bisectriz del ángulo.

SIMBÓLICAMENTE REPRESENTAMOS

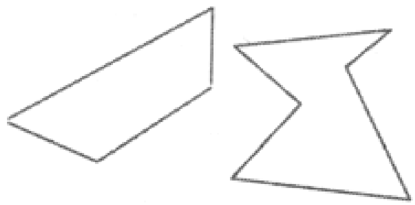


POLÍGONOS

POLIGONAL ABIERTA: Si tenemos n puntos no colineales en determinado orden, la figura resultante de la unión de los pares de puntos consecutivos será compuesta de n-1 segmentos y se llama línea poligonal abierta.

POLIGONAL ABIERTA

POLIGONAL CERRADA: Si unimos el último punto al primero, la figura constará de n segmentos y se llamará línea poligonal cerrada o polígono.



POLIGONAL CERRADA

DEFINICIÓN DE POLÍGONO

Un polígono, (del griego poli, que puede traducirse como "muchos", y gono que es sinónimo de "ángulo") partiendo de esta estructura queda claro que literalmente un polígono es aquello que tiene muchos ángulos. Podemos decir que un polígono es una figura bidimensional con un cierto número *n* de lados. Si *n*=3 es un triángulo, si *n*=4 recibe diferentes nombres según sus lados sean iguales o no, paralelos o no, etc. (cuadrado, rectángulo, rombo, romboide, trapecio, trapezoide o paralelogramo), si n=5 es un pentágono, etc.

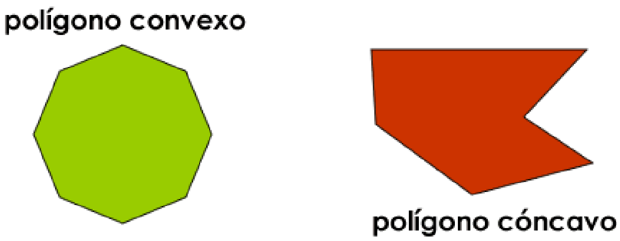
Si todos los lados de un polígono son de igual longitud se denominan **polígono regular.**

La **superficie** contenida por una **línea poligonal cerrada** se llama **polígono**.

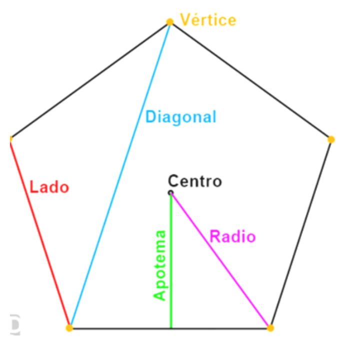
Los polígonos pueden ser:

• **Convexos:** todos sus ángulos interiores son menores de 180º.

• **Cóncavos**: algunos de sus ángulos interiores son mayores de 180º.

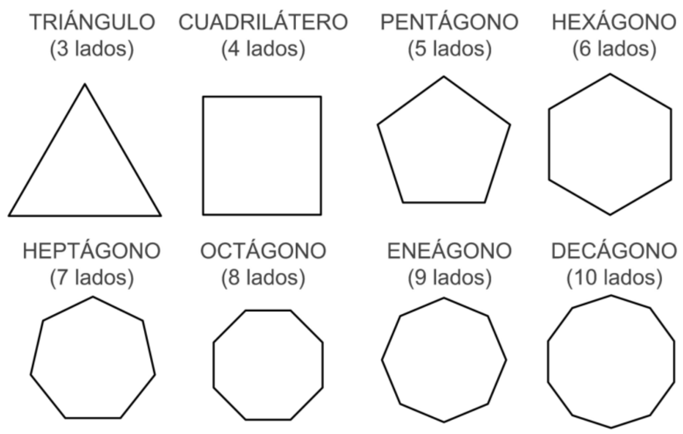


ELEMENTOS DE UN POLÍGONO



- Cada uno de los segmentos se denomina lado. El número de lados ha de ser mayor o igual a tres.
- El punto de unión de cada par de segmentos se denomina vértice.
- El ángulo formado por dos lados del polígono se denomina ángulo interior.
- El ángulo formado por un lado cualquiera y la prolongación del lado adyacente se denomina ángulo exterior.
- El segmento que une dos vértices no consecutivos del polígono convexo se denomina diagonal.

CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS



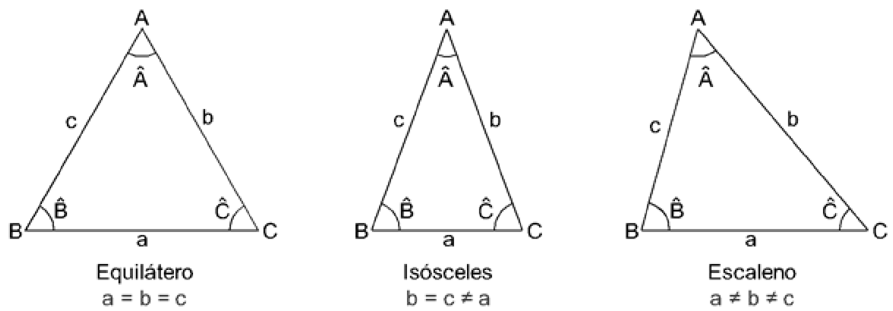
TRIÁNGULOS

Un **triángulo** es un polígono de tres lados.

Los triángulos se clasifican:

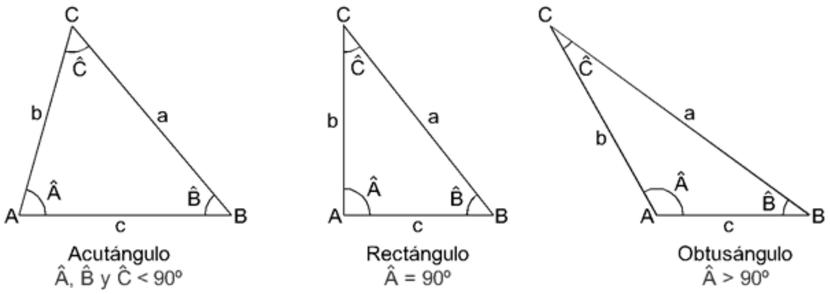
SEGÚN SUS LADOS EN:

- **Equilátero:** tres lados iguales
- **Isósceles:** dos lados iguales.
- **Escaleno:** tres lados desiguales.



SEGÚN SUS ÁNGULOS EN:

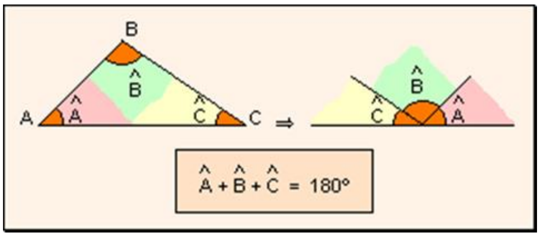
- **Acutángulo: tres ángulos agudos**
- **Rectángulo: un ángulo recto**
- **Obtusángulo: un ángulo obtuso**



PROPIEDAD DE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.

Disponiendo los ángulos del triángulo en forma consecutiva se obtiene un ángulo llano.

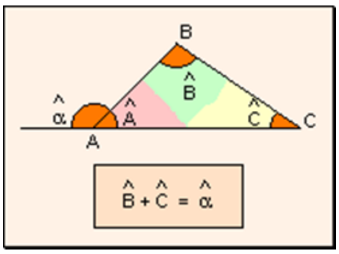


COROLARIOS:

- En todo triángulo, cada ángulo es igual a 180º menos la suma de los otros dos ángulos.
- Si en un triángulo un ángulo es rectángulo u obtuso, los dos ángulos restantes son agudos.
- Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros también son iguales.

PROPIEDAD DEL ÁNGULO EXTERIOR

Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes.

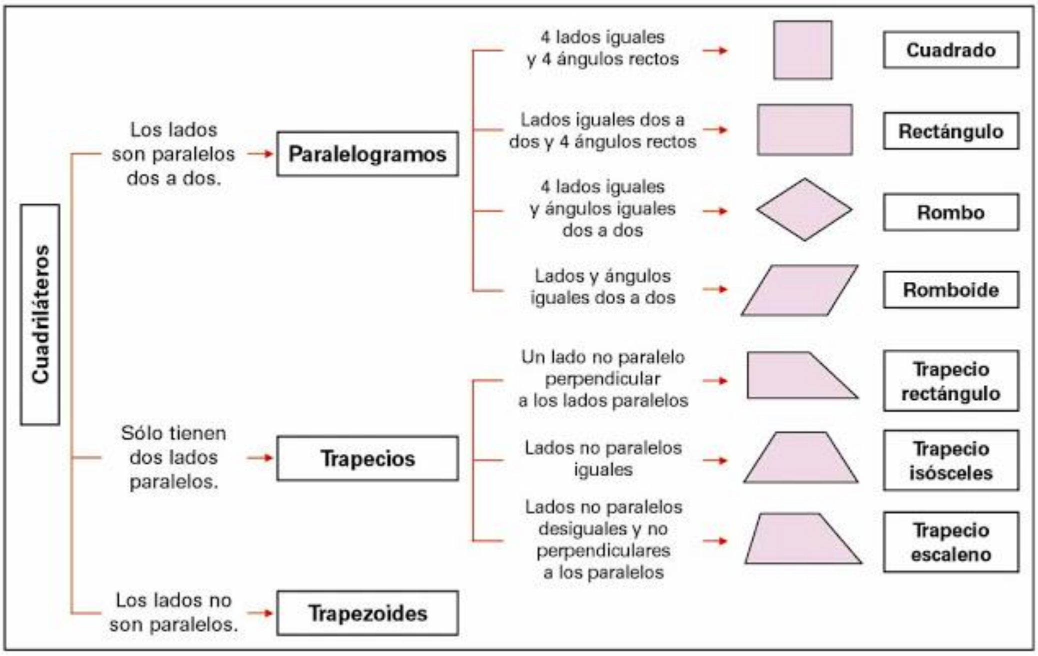


Corolario: En todo triángulo, cada ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores.

CUADRILÁTEROS

Un **cuadrilátero** es un polígono de cuatro lados. Sus elementos característicos son: lados, vértices, ángulos y diagonales.

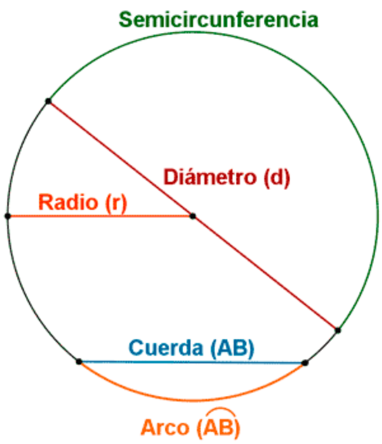
CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS



CIRCUNFERENCIA: LONGITUDES DE CIRCUNFERENCIAS Y ARCOS

El perímetro puede ser utilizado también para la longitud del contorno de una forma. El perímetro de un círculo se llama longitud de la circunferencia.

Una circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a igual distancia de otro llamado centro.



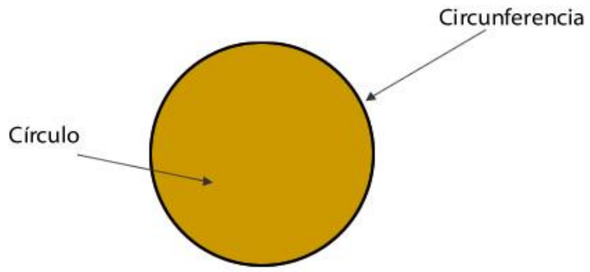
ELEMENTOS DE LA CIRCUNFERENCIA.

El **radio** es la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro.

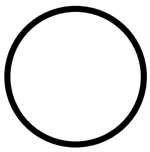
Una **cuerda** es un segmento que une dos puntos de una circunferencia.

Se llama **diámetro** a la cuerda de mayor longitud y es la que pasa por el centro. Equivale a dos radios. Un **arco** es la parte de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma. Por ejemplo $\widehat{abc}$ es un arco de la circunferencia (el punto del medio se utiliza para identificar de qué lado de la circunferencia está el arco). Se denomina ángulo central al que tiene como vértice el centro de la circunferencia.

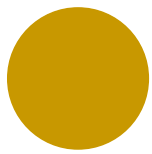
DIFERENCIA ENTRE CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO



La **circunferencia** es la línea curva y cerrada en la que todos sus puntos están a la misma distancia del centro.
En la circunferencia puedo medir la longitud de su curva, es decir su perímetro.



El **círculo** es el trozo de plano delimitado por la circunferencia.
En el círculo puedo calcular su área.



La longitud de una circunferencia de diámetro *d* y radio *r* = $\frac{d}{2}$ es: L= $\pi.d = 2.\pi.r$

$$\boxed{L = \pi.d = 2.\pi.r}$$

Proporcionalmente para la longitud de un arco de circunferencia de radio *r* y ángulo central de α grados es:

$$\boxed{\text{Long. de arco} = \frac{2\pi.r.\alpha}{360} = \frac{\pi.d.\alpha}{360}}$$

π es el número irracional y su valor para los ejercicios es $\pi = 3{,}1415$.

PERÍMETRO

Es la suma de las longitudes de los lados de una figura geométrica plana. La palabra viene del griego peri que significa alrededor y metro significa medida.

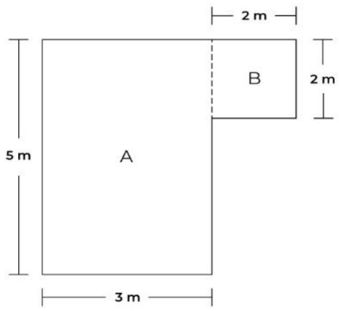
El perímetro P de un polígono cualquiera es la suma de las longitudes de los lados. Si el polígono tiene *n* lados de longitudes $l_1, l_2, \ldots l_n$ entonces su perímetro es:

$$P = l_1 + l_2 + \ldots + l_n \; .$$

Por ejemplo para poder calcular el perímetro de la siguiente figura debo sumar cada una de las longitudes de sus lados.

P= 5m +3m +3m+2m+2m+5m

P= 20 m

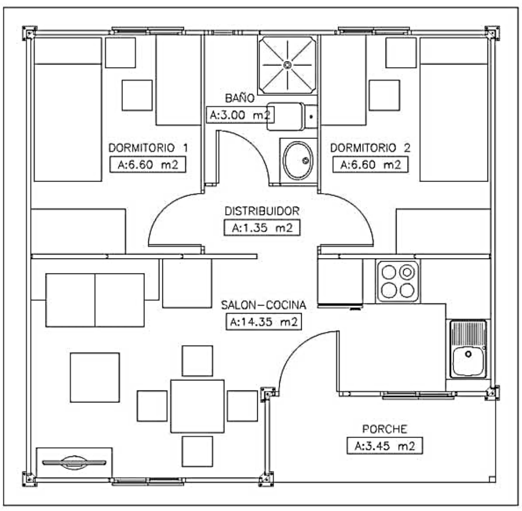


SUPERFICIE

La superficie de una figura poligonal está dada por el área de la figura acompañada de la unidad de superficie (unidad, múltiplo o submúltiplo).

El cálculo de áreas de figura plana es muy importante para resolver problemas que surgen de la vida real, por ejemplo podemos calcular el área total de una vivienda para calcular el costo total de su construcción.

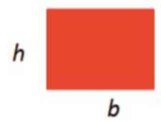
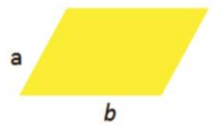
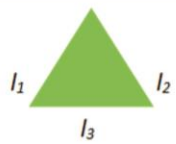
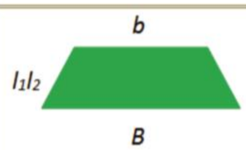
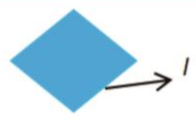
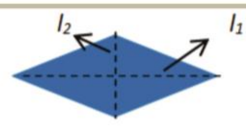
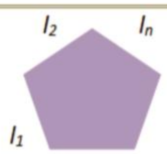
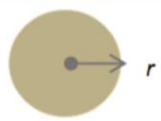
En una figura irregular podemos calcular el área descomponiéndola en figuras más sencillas y realizando la sumatoria de cada una de ellas.



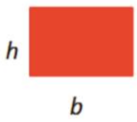
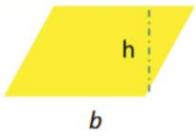
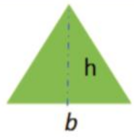
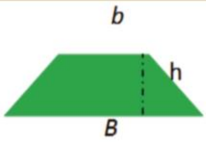
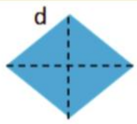
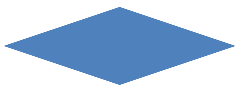
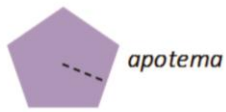
PLANTA GENERAL

PLANTA GENERAL	
Salón–Cocina	14.35 m2
Dormitorio 1	6.60 m2
Dormitorio 2	6.60 m2
Baño	3.00 m2
Distribuidor	1.35 m2
Porche	3.45 m2
SUPERFICIE UTIL	35.35 m2
SUPERFICIE CONSTRUIDA	37.35 m2

PERÍMETROS DE UNA FIGURA

NOMBRE	FIGURA	PERÍMETRO
RECTÁNGULO		$2b+2h$ o $l+l+l+l$
CUADRADO		$4l$ o $l+l+l+l$
PARALELOGRAMO		$2b+2a$ o $l+l+l+l$
TRIÁNGULO		$l_1+l_2+l_3$
TRAPECIO		$B+b+l_1+l_2$ o $l+l+l+l$
ROMBO		$4.l$ o $l+l+l+l$
ROMBOIDE		$2l_1 +2l_2$ o $l+l+l+l$
POLÍGONO REGULAR		$l_1+l_{2+\ldots+}l_n= n.l.$
LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA		$2\pi r$ o $\pi.d$

SUPERFICIE DE FIGURAS PLANAS

NOMBRE	FIGURA	ÁREA
RECTÁNGULO		$b.h$
CUADRADO		l^2
PARALELOGRAMO		$b.h$
TRIÁNGULO		$\frac{b.h}{2}$
TRAPECIO		$\frac{(B+b).h}{2}$
ROMBO		$\frac{D.d}{2}$
ROMBOIDE		b.h
POLÍGONO REGULAR		$\frac{perimetro \times apotema}{2}$
CÍRCULO		$\pi.r^2$