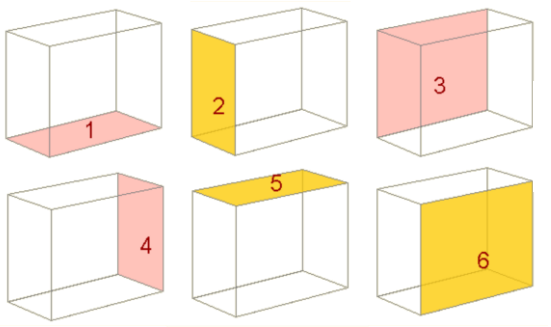
GEOMETRÍA

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Los cuerpos limitados por caras poligonales se llaman poliedros (proviene del griego y significa **poli:** mucho; **edro**: caras, es decir: "de muchas caras").

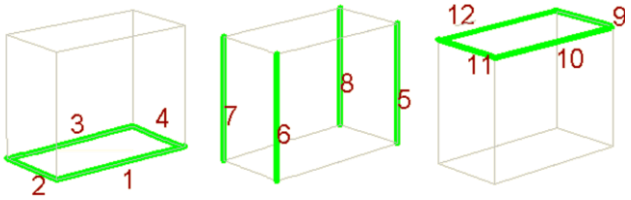
En un poliedro podemos distinguir los siguientes **ELEMENTOS**:

CARAS: son los polígonos que forman el Poliedro



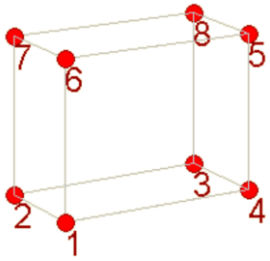
CARAS DE UN POLIEDRO

ARISTAS: son los segmentos en los que se intersectan (cortan) las caras.



ARISTAS DE UN POLIEDRO

VÉRTICES: son los puntos donde se intersectan las aristas.



VÉRTICE DE UN POLIEDRO

CLASIFICACIÓN

Según sus caras los cuerpos geométricos pueden clasificarse en:

- **Poliedros Planos**: sus caras son polígonos. Si estos polígonos que conforman sus caras son todos regulares, entonces al poliedro se le llama **Poliedro Regular**, en caso contrario se dice que son **Poliedros Irregulares**.
- **Cuerpos Redondos**: sus caras son planas y curvas o solo curvas.

POLIEDROS PLANOS REGULARES

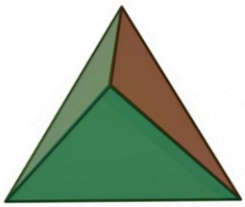
Solo hay cinco poliedros regulares. Ellos son: Tetraedro (4 caras), Hexaedro o cubo (6 caras), Octaedro (8 caras), Dodecaedro (12 caras), Icosaedro (20 caras). A estos poliedros convexos regulares se le denominan también "sólidos platónicos" pues en la Grecia clásica fueron objeto de estudio por Platón.

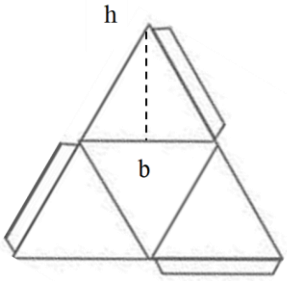
Estudiaremos estos cinco poliedros regulares, sus elementos, su desarrollo y como calcular su superficie y volumen.

Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro	
4	6	10	12	20	Caras
Triángulos	Cuadrados	Triángulos	Pentágonos	Triángulos	Tipo Cara
6	12	12	30	30	Aristas
4	8	6	20	12	Vértices

TETRAEDRO

Sus caras son **cuatro triángulos equiláteros**. En cada vértice concurren 3 caras. Para calcular su superficie se multiplica por 4 la superficie de una cara.



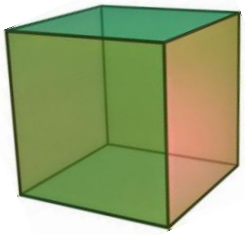


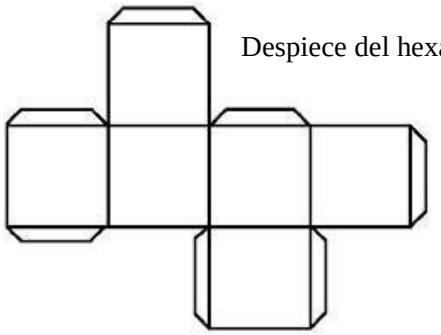
Despiece del tetraedro

$$\text{Sup.} = \frac{4b.h}{2}$$

HEXAEDRO O CUBO

Sus caras son 6 cuadrados. En cada vértice concurren 3 caras. Para calcular su superficie total se multiplica por 6 la superficie de una cara.



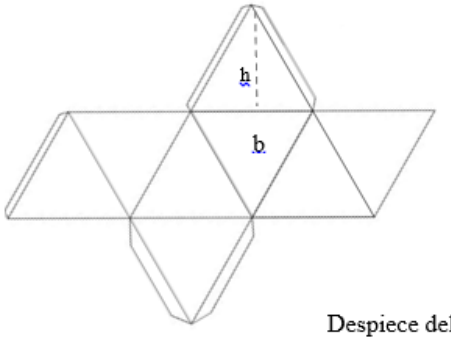


Despiece del hexaedro

$$Sup = 6.L^2$$

OCTAEDRO

Sus caras son ocho triángulos equiláteros. En cada vértice cara concurren 4 caras. Para calcular su superficie se multiplica por 8 la superficie de una cara.

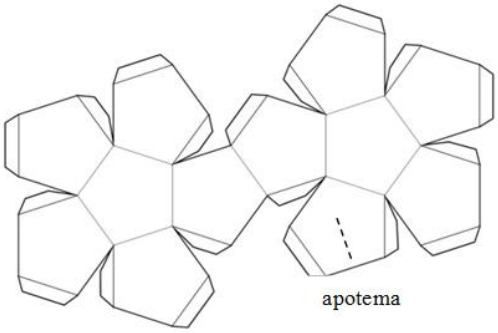


$$Sup. = \frac{8b.h}{2} = 4.b.h$$

Despiece del octaedro

DODECAEDRO

Sus caras son 12 pentágonos regulares. En cada vértice concurren 4 caras. Para calcular la superficie se multiplica por 12 la superficie de una cara.



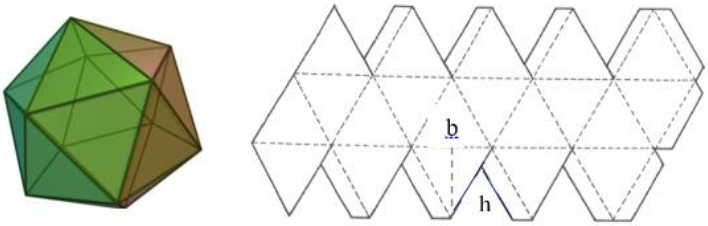
$$Sup. = \frac{20b.h}{2} = 10.b.h$$

Despiece del dodecaedro

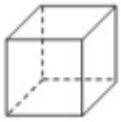
ICOSAEDRO

Sus caras son veinte triángulos equiláteros. En cada vértice concurren 5 caras. Para calcular su superficie se multiplica por 20 la superficie de una cara.

Despiece del icosaedro



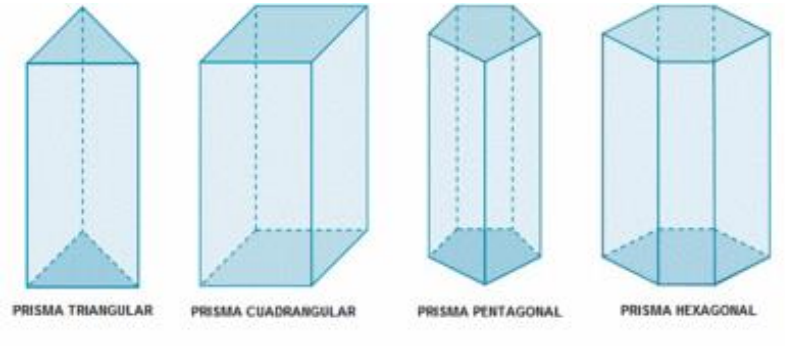
$$Sup = 12\frac{perimetro.apotema}{2} = 6\,perimetro.apotema$$

FIGURA	ESQUEMA	Nº DE CARAS	ÁREA	VOLUMEN
Tetraedro		4 caras, triángulos equiláteros	$A = 2.b.h$	$V = \frac{\sqrt{2}}{12}.a^3$
Cubo		6 caras, cuadrados	$A = 6\,a^2$	$V = 6.a^3$
Octaedro		8 caras, triángulos equiláteros	$A = 4.b.h$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3}.a^3$
Dodecaedro		12 caras, pentágonos regulares	$A = 6.perim.ap$	$V = \frac{1}{4}.(15 + +\sqrt{5}).a^3$ $V \cong 7{,}66.a^3$
Icosaedro		20 caras, triángulos equiláteros	$A = 10.b.h$	$V = \frac{5}{12}.(3 + \sqrt{5}).a^3$ $V \cong 2{,}18.a^3$

REFERENCIAS: a= arista **ap**= apotema **h**= altura

POLIEDROS PLANOS IRREGULARES

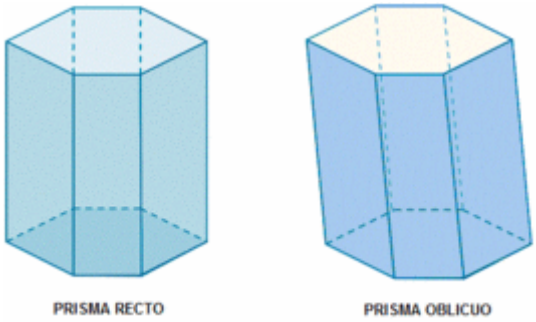
Los principales poliedros irregulares son los prismas y las pirámides.



PRISMAS

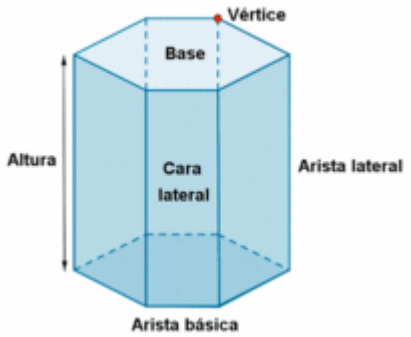
Sus caras laterales son paralelogramos y las bases, dos polígonos iguales ubicados en planos paralelos. A los prismas se les clasifica según el número de lados de sus bases: triangular (3 lados), cuadrangular (4 lados), pentagonal (5 lados), hexagonal (6 lados),etc.

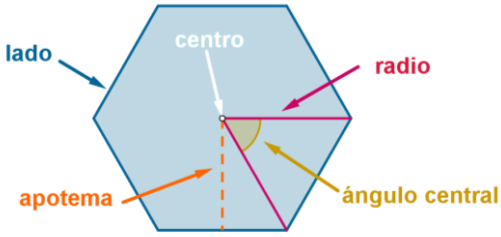
Los prismas pueden ser:



- **Rectos**: cuando todas las caras laterales son rectángulos perpendiculares a las bases.

Si sus bases son polígonos regulares, se le llama **prisma regular,** al ser regulares las bases podemos referenciar el radio de la circunferencia circunscrita y la apotema de la base; por ejemplo, en un prisma hexagonal regular, la base es un hexágono regular. Se muestra la apotema y el radio de la circunferencia circunscrita.





- **Oblicuos**: Algunas o todas las caras no son perpendiculares a las bases.

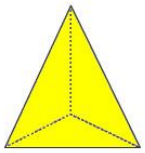
En todo prisma se puede calcular: Superficie total, superficie lateral y volumen.

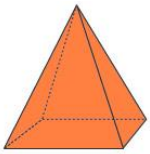
- **Superficie lateral**: es la suma de todas las caras laterales.
- **Superficie total**: es la superficie lateral más la superficie de las dos caras.

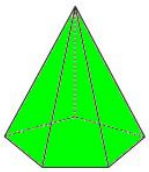
PIRÁMIDES

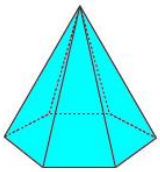
Su base es un polígono y sus caras laterales son siempre triángulos que concurren en un punto llamado vértice o cúspide. Las pirámides se pueden clasificar por la forma de sus bases.

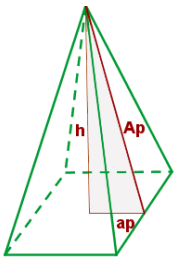
Una pirámide cuya base es un polígono regular y en la cual el pie de la altura coincide con el centro de la base se llama **pirámide regular**, en caso contrario se llama **pirámide irregular**.


Pirámide triangular


Pirámide cuadrangular


Pirámide pentagonal


Pirámide hexagonal



Sup. Lateral =(Perm. de la base $\times$ Apotema lateral)/2

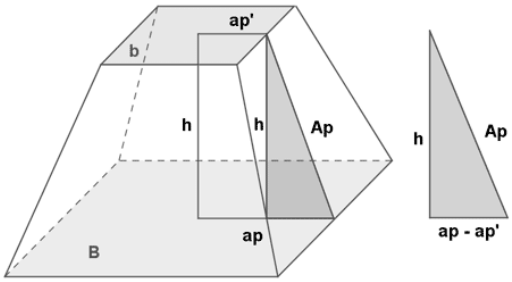
Sup. Total = Sup. Lateral +Sup Base

Volumen = $\dfrac{Sup.Base \times altura}{3}$

La apotema es la altura de los triángulos isósceles de las caras de la pirámide. NO se debe confundir con la altura de la pirámide.

Si a una pirámide la intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otra pirámide y otro poliedro denominado: Tronco de pirámide

El tronco de pirámide tiene dos bases que son polígonos semejantes y las caras laterales son trapecios.



$$AL = \frac{PerdeB_1 + PerdeB_2 \,.\, aplat}{2}$$

$$AT = AB_1 + AB_2 + AL$$

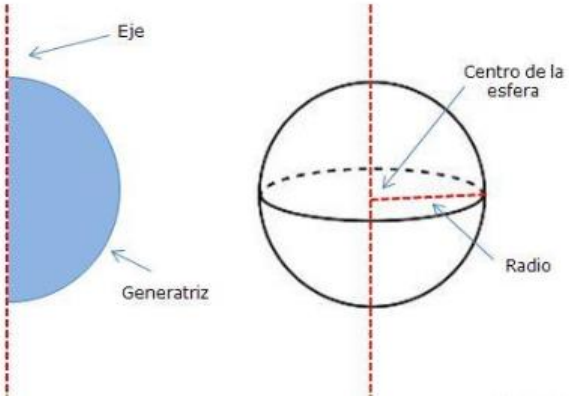
$$V = \frac{1}{3}.(AB_1 + AB_2 + \sqrt{AB_1 + AB_2}.h)$$

CUERPOS REDONDOS

La esfera, el cilindro y el cono tienen superficies curvas. Se los llama cuerpos redondos.

ESFERA

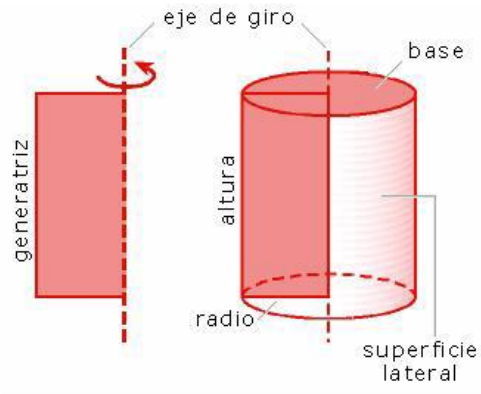
La esfera es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un semicírculo (o un círculo) alrededor del diámetro. La recta en la que se sitúa éste es el eje de revolución y la semicircunferencia la generatriz. La superficie esférica de centro O y radio r es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a distancia r del punto O.
Sup. Total $=4\ \pi\ r^2$



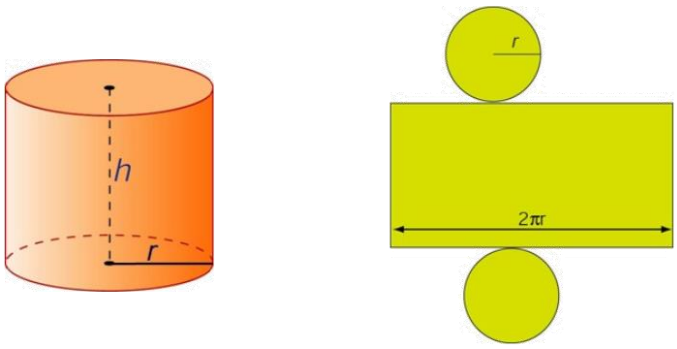
La *esfera* de centro *O* y radio *r* está formada por la superficie esférica de centro *O* y radio *r* y todos los puntos interiores de ella. Vol. = $\frac{4}{3}\pi r^3$

CILINDRO

Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina eje de rotación y el lado paralelo a él es la generatriz.



El cilindro tiene dos bases circulares paralelas. El segmento que une los centros de los círculos es el eje del cilindro y el radio del cilindro es el radio de sus bases. Un cilindro cuyo eje es perpendicular a la base se llama cilindro recto. La altura de un cilindro es un segmento perpendicular desde el plano de una base hasta el plano de la otra.



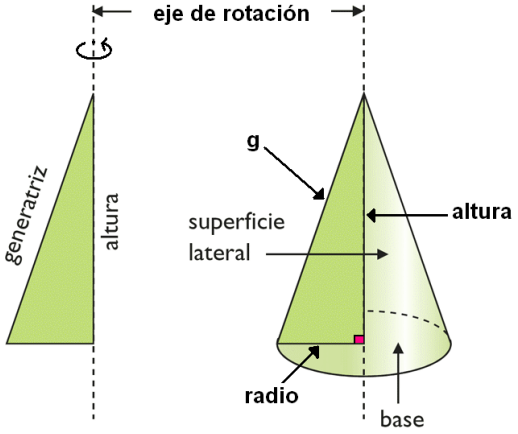
Sup. Lateral =long. Circunferencia .altura = $2\pi r h$

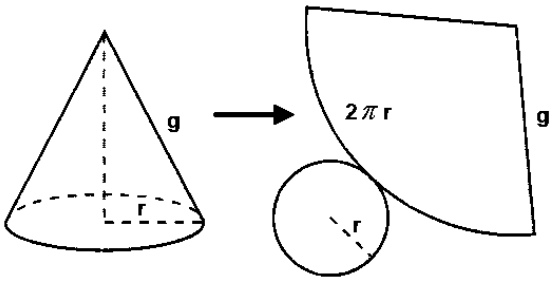
Sup. Total = Sup. Lateral +2. Sup. bases =$2\pi r h+2\pi r^2$

Volumen = Sup. Base$\times$ Altura = $\pi r^2 h$

CONO

Un cono recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de los catetos. La recta en la que se sitúa el lado sobre el que gira se denomina eje de rotación y la hipotenusa es la generatriz. En un cono distinguimos la superficie lateral y base que es un círculo. El punto donde convergen las generatrices es el vértice.La altura del cono recto es la distancia del vértice a la base. El cono tiene una base y un vértice. La base de un cono es una circunferencia. El radio del cono es el radio de la base. La altura de un cono es el segmento perpendicular trazado desde el vértice hasta el plano de la base.





Sup. Lateral =(long. circunferencia $\times$generatriz)/2

Sup. Lateral = π r g

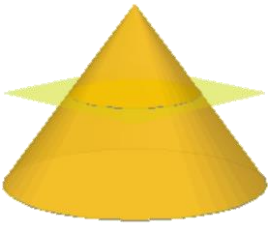
Sup. Total = Sup. Lateral +Sup. base

Sup. Total = π *r g*+ π r^2 = π *r(g+r)*

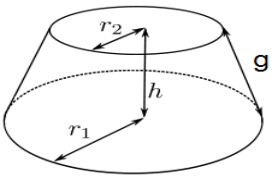
Volumen = $\dfrac{\text{Sup. Base Altura}}{3} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

CONO TRUNCADO

Si un cono lo intersecamos con un plano paralelo a la base, obtenemos otro cono y otro sólido de revolución denominado: tronco de cono.



El tronco de cono tiene dos bases que son círculos y una cara lateral cuyo desarrollo es un sector de una corona circular.



$AB_1 = \pi . {r_1}^2$

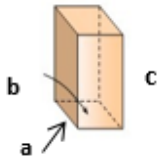
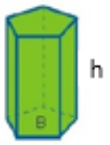
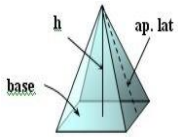
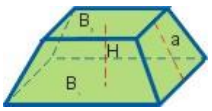
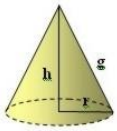
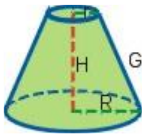
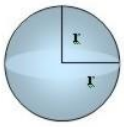
$AB_2 = \pi . {r_2}^2$

$AL = \pi . (r_1 . r_2) . g$

$AT = AB_1 + AB_2 + AL$

$V = \frac{1}{3} . (AB_1 + AB_2 + \sqrt{AB_1 + AB_2} . h)$

TABLA DE VOLÚMENES DE LOS CUERPOS GEOMÉTRICOS

Figura	Esquema	Área	Volumen
PARALEPÍPEDO O PRISMA RECTANGULAR RECTO		$AT = 2.(a.b + a.c + b.c)$	$V = a.b.c$
PRISMAS		$AL = Perim\ de\ la\ base\ .h$ $AT = 2.AB + AL$	$V = AB.h$
CILINDRO		$AB = \pi.r^2$ $AL = 2.\pi.r.h$ $AT = 2.AB + AL$ $AT = 2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h$	$V = AB.h$ $V = \pi.r^2.h$
PIRÁMIDE		$AL = \frac{Per\ de\ la\ base\ .ap\ lat}{2}$ $AT = AB + AL$	$V = \frac{1}{3}.AB.h$
PIRÁMIDE CUADRANGULAR TRUNCADA		$AL = \frac{Per\ deB_1 +\ Per\ de\ B_2\ .ap\ lat}{2}$ $AT = AB_1 + AB_2 + AL$	$V = \frac{1}{3}.(AB_1 + AB_2 + \sqrt{AB_1 + AB_2}.h)$
CONO		$AB = \pi.r^2$ $AL = \pi.r.g$ $AT = AB + AL$ $AT = \pi.r^2 + \pi.r.g$	$V = \frac{1}{3}.\pi.r^2.h$
CONO TRUNCADO		$AB_1 = \pi.{r_1}^2$ $AB_2 = \pi.{r_2}^2$ $AL = \pi.(r_1.r_2).g$ $AT = AB_1 + AB_2 + AL$	$V = \frac{1}{3}.(AB_1 + AB_2 + \sqrt{AB_1 + AB_2}.h)$
ESFERA		$AT = 4\pi.r^2$	$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3$

REFERENCIAS: **AT** Área total; **AL**: Área lateral, **AB**: Área de la Base, **g**: generatriz, **ap**: apotema, **r**: radio, **h**: altura.