## OPERACIONES CON NÚMEROS REALES. PROPIEDADES.

CONTENIDOS: Operaciones con números reales: suma, resta, producto, cociente. Propiedades de las operaciones. Producto y cociente de potencias de igual base. Potencia de potencia. Potencia de exponente negativo. Potencia de un producto y de un cociente. Radicación. Potencia de exponente fraccionario. Ejercicios combinados.

## CONJUNTOS DE NUMÉROS REALES

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo designa con R.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Naturales } (Z^{+} = N)\\ \text{Cero } (0)\\ \text{Negativos } (Z^{-})\end{array}\right\}\ \text{Enteros } (Z)\\ \qquad\qquad\qquad\text{Fraccionarios } (F)\end{array}\right\}\ \text{Racionales } (Q)\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Irracionales } (H)\end{array}\right\}\ \text{Reales } (R)$$

## OPERACIONES ELEMENTALES CON NÚMEROS REALES

**Suma algebraica de fracciones.**

a- De igual denominador

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \text{ con } b \neq 0 \qquad \text{Ej.1 } \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad \text{Ej.2 } \frac{4}{7} - \frac{9}{7} = -\frac{5}{7}$$

b- De distinto denominador. Hay dos formas para resolverlo.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a.d \pm b.c}{b.d} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \qquad \text{Ej. } \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2.5 + 3.3}{3.5} = \frac{19}{15}$$

$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m \div b).a \pm (m \div d).c}{m}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ siendo $m$ = mínimo común múltiplo entre b y d

$$\text{Ej. } \frac{3}{24} - \frac{5}{18} = \frac{(72 \div 24).3 - (72 \div 18).5}{72} = \frac{9 - 20}{72} = \frac{-11}{72}$$

**Multiplicación de fracciones**

$$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d} \text{ con } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0 \qquad \text{Ej. } \frac{2}{5} . \frac{1}{3} = \frac{2.1}{5.3} = \frac{2}{15}$$

**División de fracciones**

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$ con $b \neq 0$ , $c \neq 0$ y $d \neq 0$ Ej. $\frac{2}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{2.2}{3.5} = \frac{4}{15}$

**Nota**: *Recordá "la regla de la herradura"*

## PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

- ✓ <u>**Conmutativa de la suma y el producto**</u>

  La suma o adición de dos números reales es conmutativa.

  a + b = b + a Ej. 2+5 = 5+2 =7

  El producto o multiplicación de dos números reales es conmutativo.

  $a.b = b.a$ Ej. $2.5 = 5.2 = 10$

- ✓ <u>**Asociativa de la suma y el producto**</u>

  La suma algebraica de tres o más términos es asociativa.

  a + b + c = a+ (b + c) = (a + b) + c

  Ej. 2+5+9 = 2+ (5+9) =2+14= (2+5)+9= =7+9=16

  El producto de tres o más números reales es asociativa.

  $a.b.c = (a.b).c = a.(b.c)$

  Ej: 2.5.9 = (2.5).9 = 10.9=2.(5.9) =2.45= 90

Recordá que:

- ✓ El producto o el cociente de dos números reales de igual signo es un número real positivo.
  Ej. a) –2.(-3)=6 b) -2/-4=1/2 c) 2.4=8

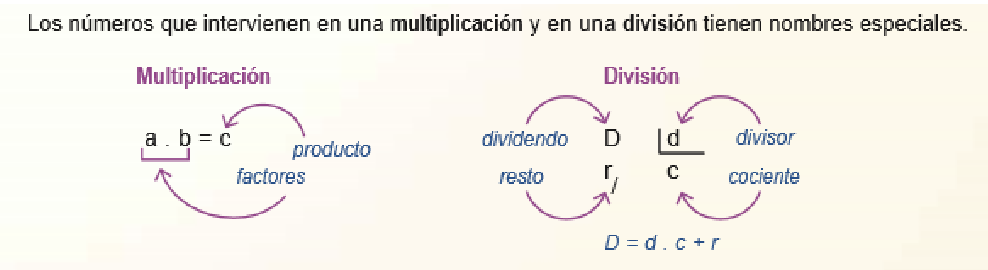
- ✓ El producto o cociente de dos números reales de diferente signo es siempre un número real negativo. Ej. a) 2.(-4)=-8 b) -6.2=-12 c) 6/-3=-2 d) –8/2=-4

- ✓ El elemento neutro para el producto o el cociente es el 1. Ej: a) 6.1=6 b) 6/1=6

- ✓ <u>**Distributiva del producto con respecto a la suma algebraica**</u>

  La multiplicación de números reales es distributiva respecto de la suma algebraica.

  a. (b + c - d) = a .b + a .c - a .d Ej. 2. (5+9-3) = 2.5 + 2.9 –2.3=22



| Propiedades de la multiplicación | |
|---|---|
| **Asociativa**: si se cambia el orden de los paréntesis, el resultado no cambia. $(5 \,.\, 12) \,.\, 4 = 5 \,.\, (12 \,.\, 4)$ | **Conmutativa**: el orden de los factores no cambia el resultado. $6 \,.\, 8 = 8 \,.\, 6$ |
| **Disociativa**: un factor se puede descomponer en otros factores. $7 \,.\, 24 = 7 \,.\, (2 \,.\, 12)$ | **Elemento neutro**: el número 1 como factor no cambia el resultado. $15 \,.\, 1 = 1 \,.\, 15 = 15$ |

**Propiedad distributiva de la multiplicación**

$3 \,.\, (4 + 5) = 3 \,.\, 4 + 3 \,.\, 5$ $\qquad$ $(9 - 3) \,.\, 2 = 9 \,.\, 2 - 3 \,.\, 2$

**Propiedad distributiva de la división**

$(12 + 4) : 2 = 12 : 2 + 4 : 2$ $\qquad$ $(15 - 9) : 3 = 15 : 3 - 9 : 3$

En la división, solo se puede distribuir el divisor.

**PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN**

La potenciación es una operación que permite escribir en forma abreviada una multiplicación de factores iguales

Se define la **potencia** de un número como:

$a^n = \underbrace{a.a.a....a}_{n\ veces}$ se lee: *"a elevado a la ene", donde n pertenece a los Naturales*

$4^2 = 4.4 = 16$ *"CUATRO ELEVADO AL CUADRADO"*

$4^3 = 4.4.4 = 64$ *"CUATRO ELEVADO AL CUBO"*

*Sea* $a^n = c$*; a: es la base, n: exponente, c: potencia enésima de a*

*Si n<0 , entonces puedo reescribirla de la siguiente manera*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \;,\quad a \neq 0$$

Ej:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \;,\quad a \neq 0$$

- La potenciación es distributiva respecto del producto y del cociente de las bases.

$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$ $\qquad$ Ej. $(2.5)^3 = (2)^3 . (5)^3 = 1000$

$(a / b)^n = a^n / b^n$ con $b \neq 0$ $\qquad$ Ej. $(20/5)^3 = (20)^3 / (5)^3 = 64$

- La potenciación es asociativa respecto del producto y del cociente de las bases cuando ambos exponentes son iguales.

$a^n \,.\, b^n = (a \,.\, b)^n$ $\qquad$ Ej. $(2)^3 . (5)^3 = (2.5)^3 = 1000$

$a^n / b^n = (a / b)^n$ con $b \neq 0$ $\qquad$ Ej. $(20)^3 / (5)^3 = (20/5)^3 = 64$

➢ La multiplicación de dos potencias de igual base los exponentes se suman siendo su base la misma.

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Ej. $5^3 . 5^2 = 5^{3+2} = 5^5 = 3125$

➢ El cociente de dos potencias de igual base los exponentes se restan siendo su base la misma..

$a^n / a^m = a^{n-m}$ Ej. $5^3 / 5^2 = 5^{3-2} = 5$

➢ La potencia de una potencia se obtiene tomando la misma base y por exponente el producto de ambas potencias.

$(a^{n})^m = a^{n.m}$ Ej. $(2^2)^3 = 2^6 = 64$

➢ Toda potencia con base distinta de cero cuyo exponente es cero, su valor es siempre igual a uno.

$(a)^0=1$ a: base distinta de cero Ej. $5^0=1$; $(-1/2)^0=1$

➢ Toda potencia de exponente 1 es igual a la base.

$a^1=a$ $5^1=5$

| Propiedades de la potenciación | Ejemplo |
|---|---|
| • Para **multiplicar dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se suman los exponentes. | $3^2 . 3^3 = 3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 3^{2+3} = 3^5$ |
| • Para **dividir dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se restan los exponentes. | $2^5 : 2^2 = (2 . 2 . 2 . 2 . 2) : (2 . 2) = 2^{5-2} = 2^3$ |
| • Para calcular la **potencia de otra potencia**, se escribe la misma base y se multiplican los exponentes. | $(5^2)^3 = (5 . 5)^3 = (5 . 5) . (5 . 5) . (5 . 5) = 5^{2 . 3} = 5^6$ |
| • La potenciación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división. | $(4 . 3)^2 = 4^2 . 3^2$<br>$(12 : 4)^2 = 12^2 : 4^2$ |

Teniendo en cuenta las propiedades de la potencia, completen V (verdadero) o F (falso). Si es falso justifique con la propiedad correcta y si es verdadero coloque la propiedad que usó.

$(5+3)^2 = 5^2 + 3^2$ $\boxed{F}$ Porque la potencia no es distributiva con respecto a la suma.

$3^4 = 12$ $\boxed{\phantom{F}}$

$(5.3)^2 = 5^2.3^2$ $\boxed{\phantom{F}}$

$(8-4)^2 = 8^2 - 4^2$ $\boxed{\phantom{F}}$

$(8:4)^2 = 8^2:4^2$ $\boxed{\phantom{F}}$

$2^3 = 3^2$ $\boxed{\phantom{F}}$

$(2^7)^2 = 2^7.2^2$ $\boxed{\phantom{F}}$

$(4^3)^2 = 4^{3.2}$ $\boxed{\phantom{F}}$

## RADICACIÓN

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

$\sqrt[2]{64} = 8$, porque $8^2 = 64$

Se define la **raíz** de un número como:

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$ Se lee: *"raíz enésima de a"; a: radicando, n: índice, b: raíz enésima* $\sqrt{\ }$ *: radical.*

A tener en cuenta que:

- Si $n$ es impar: $\sqrt[n]{a^n} = a$
- Si $n$ es par: $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

➢ La radicación es distributiva respecto del producto y del cociente excepto en aquellos casos donde el radicando sea negativo y el índice de la raíz sea par.

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ Ej. $\sqrt[2]{4.9} = \sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{4}.\sqrt[2]{9} = \pm 2.3 = \pm 6$

$\sqrt[n]{a:b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ con $b \neq 0$ Ej. $\sqrt[2]{4:9} = \sqrt[2]{4} : \sqrt[2]{9} = \pm 2/3$

➢ La radicación de índice n se puede expresar como una potencia donde el exponente es 1/n.

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ Ej. a) $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$ b) $\sqrt[4]{9^2} = 9^{\frac{2}{4}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ Ej. $\sqrt[2]{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

**<u>IMPORTANTE</u> : La potenciación y la radicación <u>no son distributivas ni asociativas con respecto a la suma y a la resta.</u>**

| Propiedades de la radicación | Ejemplo |
|---|---|
| • La radicación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división. | $\sqrt{9\ .\ 16} = \sqrt{9}\ .\ \sqrt{16}$<br><br>$\sqrt{64 : 16} = \sqrt{64} : \sqrt{16}$ |
| • **Para multiplicar o dividir raíces de igual índice,** se escribe una raíz con el mismo índice y con el radicando igual a la multiplicación o división de los radicandos dados, según corresponda. | $\sqrt{8}\ .\ \sqrt{2} = \sqrt{8\ .\ 2}$<br><br>$\sqrt[3]{243} : \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{243 : 9}$ |

Completen V (verdadero) o F (falso). Justifique su respuesta con la propiedad correcta que usó.

$\sqrt[2]{100} = 50$

$(3+2+5)^2 = 3^2 + 2^2 + 5^2$ $\square$

$\sqrt[2]{9} + \sqrt[2]{16} = \sqrt[2]{25}$ $\square$

$\sqrt[2]{8}.\sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16}$ $\square$

$\sqrt[2]{16} : \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16:2}$ $\square$

$\sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{16+2}$ $\square$

Resuelve aplicando las propiedades cuando sea posible:

a) $2^{18} \,.\, (2^5)^4 : (2^{30} \,.\, 2^7) \,.\, 2 =$

b) $\sqrt[5]{5} \,.\, \sqrt[5]{5^3} \,.\, \sqrt[5]{5^4} : \sqrt[5]{5^3} =$

c) $\sqrt[6]{16} \,.\, \sqrt[6]{8} : \sqrt[6]{2} =$

d) $\sqrt[2]{81 \,.\, 64 : 144} =$

e) $4\,.\,(5\,.7 + 10) + 270 : 30 - (18 - 4.2) =$

f) $5^8 \,.\, 5^{13} : 5^{19} + (4 \,.\, 9 - 12)^0 - \sqrt{45} : \sqrt{5} =$

**EJERCICIOS COMBINADOS**

Para resolver este tipo de ejercicios:
1. Se separa en términos.
2. Se resuelven los cálculos que están dentro de los paréntesis.
3. Se resuelven las potencias y raíces.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.

Ejemplos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{9}{121}} \cdot 11 - \frac{5}{6}\right) : \frac{25}{6} =$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{13}{6} : \frac{25}{6} =$$

$$\frac{9}{25} + \frac{13}{6} : \frac{25}{6} =$$

$$\frac{9}{25} + \frac{13}{25} =$$

$$= \frac{22}{25}$$

$$2 . \sqrt{36} + 12 : 2 + 5^2 . 3 - 6^{15} . 6^8 : 6^{21} =$$
$$2 . 6 + 12 : 2 + 25 . 3 - 6^2 =$$
$$2 . 6 + 12 : 2 + 25 . 3 - 36 =$$
$$12 + 6 + 75 - 36 =$$
$$93 - 36 =$$
$$= 57$$

$$\sqrt{5^2 + 12 . 3 + 3} - (15 : 3 - 3)^2 + 144 : 12 =$$
$$\sqrt{25 + 12 . 3 + 3} - (15 : 3 - 3)^2 + 144 : 12 =$$
$$\sqrt{25 + 36 + 3} - (5 - 3)^2 + 144 : 12 =$$
$$\sqrt{64} - 2^2 + 12 =$$
$$8 - 4 + 12 =$$
$$= 16$$

Para tener en cuenta al trabajar con los signos:

| Regla de los signos | |
|---|---|
| **Para la multiplicación** | **Para la división** |
| + . + = + | + : + = + |
| − . − = + | − : − = + |
| + . − = − | + : − = − |
| − . + = − | − : + = − |

| | |
|---|---|
| El producto de dos números enteros de igual signo es un número **positivo**. | $4 . 3 = 12$<br>$-5 . (-2) = +10$ |
| El producto de dos números enteros de **distinto signo** es un número **negativo**. | $4 . (-3) = -12$<br>$(-5) . 2 = -10$ |
| El cociente de dos números de **igual signo** es un número **positivo**. | $14 : 7 = 2$<br>$-8 : (-2) = 4$ |
| El cociente de dos números de **distinto** signo es un número **negativo**. | $14 : (-7) = -2$<br>$-8 : 2 = -4$ |

### Actividad 1

Indica la opción que tiene la igualdad correcta

a) $(a.b^2)^3 = a^3.b^5$
b) $(a+b)^4 = a^4 + b^4$
c) $a^m + b^n = (a.b)^{m+n} =$
d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{b^3}{a^3}$

### Actividad 2

Usar el signo $=$ $o$ $\neq$ , según corresponda para que las expresiones sean verdaderas.
(12 -4)-2 ……………………………………………..12-(4-2)

$2^3 + 3^2$ ............................................. $(2+3)^2$

$\frac{9.8}{6}$ ............................................. $\frac{9}{6} \cdot \frac{8}{6}$

$\frac{9+6}{9-6}$ ............................................. $\frac{3+2}{3-2}$

$\frac{4^3+4^2}{4}$ ............................................. $4 + 4^2$

### Actividad 3

Unir con flecha según corresponda

| | |
|---|---|
| a+a+a | $a^2$+a |
| a.a | 4.$a^2$ |
| 3.a.a | 3.a |
| $a^2$.a | 2.$a^2$ |
| (2.a)$^2$ | $a^3$ |
| $a^2$+ $a^2$ | 3.$a^2$ |
| $a^2$+a | $a^2$ |

### Actividad 4

Resolver los siguentes ejercicios combinados teniendo en cuenta todas las propieddes vista y use la calculadora lo menos posible.
Nos interesa el "proceso" y no el resultado .

**a.** $\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \boxed{\frac{2}{45}}$

**b.** $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{54}{5} - \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{4}\right) = \boxed{\frac{27}{10}}$

**c.** $\frac{5}{2} + \frac{10}{6} : \frac{15}{12} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{2}}$

**d.** $\sqrt{\frac{25}{121}} \cdot \frac{11}{4} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boxed{\frac{29}{36}}$

**e.** $\left(\frac{12}{4} \cdot \frac{5}{24}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \boxed{\frac{73}{64}}$

**f.** $\frac{5}{9} + \sqrt[4]{\frac{1296}{256}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \boxed{\frac{23}{27}}$

**Resuelvan.**

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)^2 : \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} + \frac{1}{5} =$

$\frac{19}{20}$

b. $\sqrt{\frac{2}{5}+\frac{6}{25}} \cdot \frac{1}{2} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}} - \frac{2^3}{5} =$

$\frac{3}{10}$

c. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{13} + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} =$

$\frac{1}{4}$

d. $\sqrt{\frac{16}{25}} + \frac{7}{2} : \frac{14}{4} \cdot 13 - \sqrt{\frac{49}{5^2}} =$

$\frac{62}{5}$

e. $\sqrt{2 \cdot \frac{18}{25}} + \sqrt{1+\frac{21}{100}} - \frac{3}{5} =$

$\frac{17}{10}$

f. $\sqrt[3]{\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4}} + \sqrt[4]{81} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$

$\frac{71}{16}$