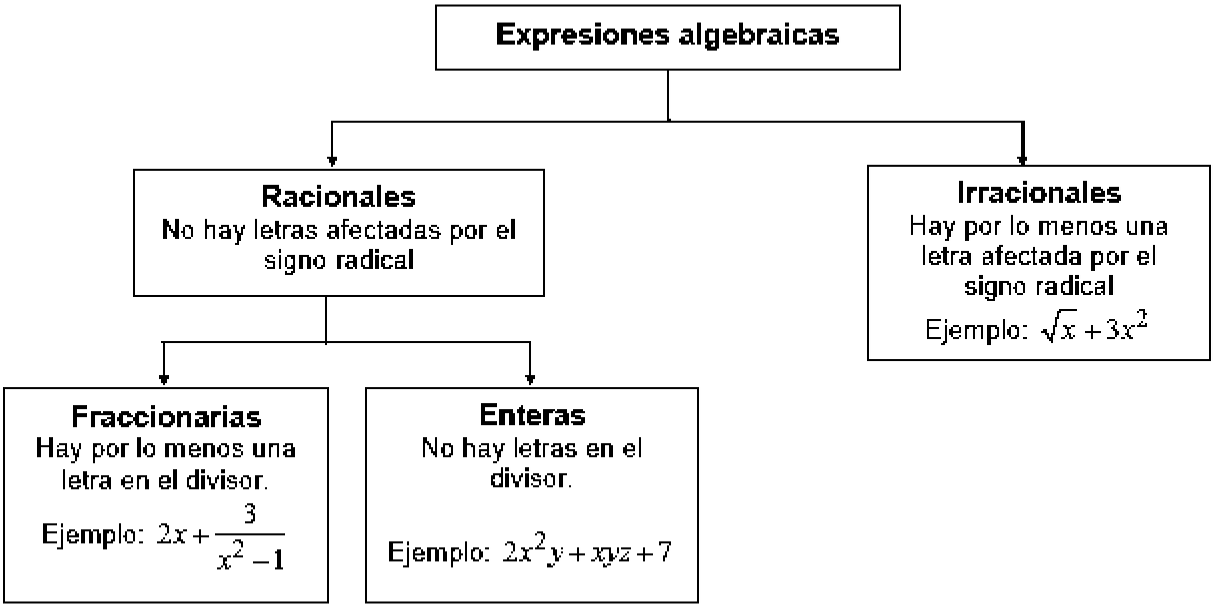
EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama expresión algebraica a cualquier combinación de números representados por letras o por letras y cifras, vinculados entre sí por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$2x^3y+3x+z \qquad y^3-\frac{3}{y}+y^2 \qquad \frac{x+2y}{3x-y}$$

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS



EXPRESIONES ALGEBRAICAS ENTERAS

Se estudiarán ahora expresiones algebraicas enteras.

MONOMIOS

Los monomios son expresiones algebraicas de un solo término.

Ejemplo:

$5x^3.y$

- ✓ el número 5 recibe el nombre de coeficiente
- ✓ $x^3.y$constituye la parte literal.

POLINOMIOS

La forma genérica de un Polinomio de grado "n" en la variable x se simboliza:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+.......+a_2x^2+a_1x\ +a_0$ donde $a_0,a_1,.......,a_n$, llamados coeficientes son números reales y a_0 es el término independiente, *x* es la parte literal llamada

variable del polinomio, $n, n-1, n-2, \ldots\ldots, 2, 1$ es el exponente de la variable y son siempre números naturales, n (mayor exponente) determina el grado del polinomio.
Un polinomio con un término se llama monomio, con dos términos binomio, con tres términos trinomio y así siguiendo.

Teniendo en cuenta los exponentes de la variable x podemos ordenar los términos de un polinomio en forma creciente o decreciente.

Un polinomio está completo cuando todas las potencias menores o iguales a "*n*" tienen coeficientes distintos de cero. Por ello cuando falta algún término en x o el termino independiente el polinomio es incompleto.
Términos semejantes de dos polinomios son los términos en que la variable x tiene el mismo exponente (igual grado)

Ejemplos de monomios, binomios trinomios y cuatrinomios.

- $3x$; $-2x^3$; $3x^5$, son monomios de primero, tercero y quinto grado respectivamente.
- $x-3$; x^4+x; $2-x^2$, son binomios de primero, cuarto y segundo grado respectivamente.
- $2x^3+x-4$; x^6+4x^2+x, son trinomios de tercer grado (incompleto) , y de sexto grado (incompleto) mientras que x^2+x-3, también es un trinomio de segundo grado (completo y ordenado en forma decreciente)
- $2x^3+x^2+5x-3$; cuatrinomio de tercer grado completo y ordenado en forma decreciente, mientras que $x-x^2-5x^4+x^5$.es un cuatrinomio de quinto grado, incompleto y ordenado en forma creciente.

<u>Operaciones con polinomios</u>:
Ya estudiamos operaciones con potencias de igual base.
Recordemos:

- $x^n + x^m$ no se puede sumar si $n \neq m$
- $a\,x^n + b\,x^n = (a+b)x^n$
- $x^n . x^m = x^{n+m}$

<u>Suma y Resta de polinomios</u>:

La suma de dos polinomios P_1 y P_2 es otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los términos semejantes en P_1 y P_2.

La diferencia o resta de un polinomio P_1 y un polinomio P_2 es el polinomio que se obtiene sumando a P_1 el opuesto de P_2.(Recuerda que dos polinomios, son opuestos, cuando tienen opuestos los coeficientes de los términos semejantes)

Para sumar o restar polinomios se disponen de modo que los términos semejantes queden sobre una misma columna, veamos un ejemplo:

$P_1(x) = 2x^3 - 1 + 3x$
$P_2(x) = 1x^3 - 2x^2 + 2$

$P_1(x) + P_2(x)=$

$$\begin{array}{rl} & 2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \\ + & \\ & \underline{1x^3 - 2x^2 + 0x + 2} \\ P_1(x) + P_2(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \end{array}$$

$P_1(x) - P_2(x) =$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^3 + 0x^2 + 3x - 1 \\
- & \\
 & \underline{1x^3 - 2x^2 + 0x + 2} \\
P_1(x) - P_2(x) = & 1x^3 + 2x^2 + 3x - 3
\end{array}
$$

<u>Multiplicación de polinomios</u>:

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, puede generalizarse a sumas algebraicas cualesquiera. Se deduce así que se debe multiplicar todos los términos de uno por cada uno de los términos del otro y luego se suman los términos semejantes, disponiendo la operación como se ejemplifica a continuación:

$P_1(x) = x^2 - 2x + 1$
$P_2(x) = x + 3$

$$
\begin{array}{rr}
 & x^2 - 2x + 1 \\
\times & \underline{x + 3} \\
 & 3x^2 - 6x + 3 \\
 & \underline{x^3 - 2x^2 + x \quad\quad} \\
P_1(x).P_2(x) = & x^3 + x^2 - 5x + 3
\end{array}
$$

<u>División de Polinomios - Regla de Ruffini.</u>

Dividir un polinomio D(x)(dividendo) por otro d(x)(divisor), significa encontrar un polinomio C(x)(cociente) que multiplicado por el divisor de como resultado el dividendo, es decir que debe cumplirse:

$$
\begin{array}{l|l}
D(x) & \underline{d(x)} \\
\text{Resto} & C(x)
\end{array}
$$

por lo tanto según lo dicho deberá verificarse que : $D(x) = C(x).d(x) + R(x)$
donde R(x) es el resto y deberá cumplir con la condición de que el grado de R(x) sea menor que el grado de d(x).
Para poder realizar la división de polinomios el grado del dividendo debe ser mayor o igual al grado del divisor.

Las operaciones se disponen como lo muestra el ejemplo siguiente, ordenando previamente (y completando si el polinomio fuese incompleto) tanto D(x) como d(x) en potencias decrecientes de "x".

Ejemplo:
$P_1(x) = D(x) = 6x^4 + x^5 - 4x^2 + 4x^3 + 2x - 3$
$P_2(x) = d(x) = x - 1 + x^2$
Lo primero que se hará, como se explicó anteriormente será ordenarlos según potencias decrecientes y completarlo los términos faltantes con coeficientes cero.
$D(x) = x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x - 3$
$d(x) = x^2 + x - 1$
Luego se procede a la división propiamente dicha:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2x - 3 & \underline{x^2 + x - 1} \\
\underline{x^5 + x^4 - x^3} & x^3 + 5x^2 + 1 \\
\quad +5x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 2x - 3 & \\
\quad \underline{-5x^4 - 5x^3 + 5x^2} & \\
\quad\quad\quad\quad x^2 + 2x - 3 & \\
\quad\quad\quad\quad \underline{-x^2 - x + 1} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad x - 2 &
\end{array}
$$

Por lo tanto se tiene:
$C(x) = x^3+5x^2+1$ $\qquad$ $R(x) = x -2$
Compruebe la siguiente igualdad: $D(x) = C(x).d(x) + R(x)$
$x^5 +6x^4 +4x^3 -4x^2+2x -3 = (x^3+5x^2+1).(x^2 + x - 1) + x –2$

<u>Regla de Ruffini:</u>

Esta regla solo es aplicable cuando el polinomio divisor d(x) es de primer grado y de la forma (x + a) o(x - a).

EJEMPLO : Realizar la división D8x)/d(x)
$D(x) = 4x^3 + 3x^2 –x+6$
$d(x) = x + 2$
En este caso el cociente obtenido es de un grado menor que el del dividendo

Los coeficientes del dividendo completo y ordenado →
El opuesto del termino independiente del divisor es →
Los coeficientes del cociente son →

	4	3	-1	6
-2		-8	10	-18
	4	-5	9	-12

Resto

Se calculan los coeficientes del cociente de la siguiente manera:
4 es el coeficiente del término que determina el grado del cociente(x^2) y coincide con el primer término del dividendo, el resto de los coeficientes se determina realizando la operación indicada por las flechas en el esquema anterior
-5 =(-2.4)+3, es el coeficiente de x
9=(-2.-5)-1, es el término independiente
-12 es el resto.
El cociente entre $D(x)/d(x)=C(x)=4x^2-5x+9$ con un resto igual a –12.
Verifique que el valor numérico de D(x) para x=-2 es igual a –12.

TEOREMA DEL RESTO

El resto de dividir un polinomio P(x)en otro de la forma (x-*a*) o (x+*a*) es igual a P(*a*) o P(-*a*)

Como consecuencia de lo anterior, si el resto es igual a cero significa que +*a* o –*a* es raíz del polinomio.

Actividad 1

Indique el grado de los siguientes polinomios, diga si esta completo, en caso contrario complételo, y ordénelo en forma decreciente.
1. $A(x)=5x^4+2x-4+x^3$
2. $B(x)=7+ x^5 -3 x^3-6x$
3. $C(x)=-4 x^6+7x^2+3x-2$
4. $D(x)=2x+x^2+5x^4-2$
5. $H(x)=3+5x$

La solución a esta actividad se encuentra al final del tema

Actividad 2

Encuentre el valor numérico de los siguientes polinomios para los valores indicados de *a*. Indique en que casos *a* es raíz de dicho polinomio.

1. $E(x)=2x^2-x+1$ Calcule E(1); E(-2); E(0)
2. $F(x)=x^3-6x^2+9x$ Calcule F(0); F(-1);F(-3)
3. $G(x)= 2x+3$ Calcule G(-3); G(3/2); G(0)

La solución a esta actividad se encuentra al final del tema

Actividad 3

Dados los polinomios $P(x)=1/4x-3x^2$; $Q(x)=-2x^3-3x^2$; $R(x)=2x+3$; Realice las operaciones siguientes e indique el grado del polinomio resultante.

1. $2P(x)-1/3Q(x)=$
2. $Q(x)\times R(x)=$
3. $P(x)\div R(x)=$
4. $P(x)\times P(x)=P^2(x)=$

La solución a esta actividad se encuentra al final del tema

Actividad 4

Realice la división de $P(x)\div Q(x)$, aplicando la Regla de Ruffini e indicando el valor de C(x) y R(x) para :

1- $P(x) = 2x^3 + 3x^4 +3x^2 +2 - x$ $Q(x) = x -1$
2- $P(x) = x^5 +2 -x^2$ $Q(x) = x +3$
3- $P(x) = x^3 -2 +3x$ $Q(x) = x -1$

La solución a esta actividad se encuentra al final del tema

Actividad 5

Calcule el resultado de las siguientes divisiones. (Aplicando Ruffini o Teorema del Resto).

1. $x^5+32 \div x+2=$
2. $x^5+32\div x-2=$
3. $x^4-16 \div x+2=$

La solución a esta actividad se encuentra al final del tema

FACTOREO DE POLINOMIOS

Un polinomio P(x) se llama primo o irreducible cuando no se puede descomponer en un producto de polinomios de grado positivo menor que el grado de P(x).

Ejemplos

x+2 es primo.

x^2+4x no es primo pues $x^2+4x=x(x+4)$; donde x ,(x+4) son los polinomios primos.

3x+6 es primo pues 3x+6=3(x+2), ya que (x+2) es de igual grado que 3x+6.

Definición

Factorizar un polinomio P(x) significa transformarlo en el producto de una c constante por uno o más polinomios primos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Este es un teorema muy importante y de gran utilidad cuando se necesita factorizar polinomios

Si un polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ , \ con \rightarrow a_0 \neq 0$$

Tiene sus "*n*" raíces reales $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, puede expresarse factorizando en función de las mismas, de la siguiente manera:

$$P(x) = a_n (x - x_1).(x - x_2).(x - x_3) \cdots\cdots (x - x_n)$$

Coeficiente Principal | Raíces

Un polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

<u>Ejemplo</u>

Calculemos las raíces de P(x)= x^4-5x^3 + 5x^2 +5x - 6; es decir aquellos números para los cuales se hace cero el polinomio.

El polinomio se anula para x = 1 (tanteo)

$P_1 = 1^4 - 5.\ 1^3 + 5.\ 1^2 + 5.\ 1 - 6 = 0$, luego el polinomio es divisible en (x-1),siendo x=1 raíz.

Dividimos según Ruffini: $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 \div (x - 1) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

Este nuevo polinomio: $x^3 - 4x^2 + x + 6$, se anula para x = -1; es decir $(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6 = 0$.

Luego el polinomio es divisible por (x+1), siendo x= -1 raíz.

Podemos dividir por Ruffini: $x^3 - 4x^2 + x + 6 \div (x+1) = x^2 - 5x + 6$

Este nuevo cociente ($x^2 - 5x + 6$) se anula para x=2, es decir: $2^2 - 5.2 + 6 = 0$. Luego es divisible por (x-2)

$x^2 - 5x + 6 \div (x-2) = x - 3$ Este polinomio se anula para x = 3; luego 3 es la raíz del cociente.

En definitiva, las raíces de P(x) son: { 1, -1, 2, 3 } y por el Teorema Fundamental del Algebra tendremos: $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1).(x+1).(x-2).(x-3)$

FACTOR COMÚN

Se puede extraer factor común en un polinomio la indeterminada x a la mayor potencia que figure en todos los términos, un coeficiente común o ambos.

Ejemplo:

$P(x) = 5x^4 - 20x^3 + 10x^2$ sacando factor común $5x^2$ obtengo: $P(x) = 5x^2(x^2 - 4x + 2)$

FACTOR COMÚN EN GRUPOS

A veces el polinomio que se quiere factorear no contiene un factor en todos los términos, pero sí por grupos.

Ejemplo:

$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = x^2(x+3) + 2(x+3) = (x+3).(x^2+2)$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Recordemos que el cuadrado de un binomio $(x+a)^2$ es igual a la suma del cuadrado de las bases más dos veces el producto de las mismas.

$(x+a)^2 = (x+a).(x+a) = x.x + x.a + a.x + a.a = x^2 + 2xa + a^2$

$(x-a)^2 = (x-a).(x-a) = x.x - x.a - a.x + a.a = x^2 - 2xa + a^2$

Por ello toda vez que tengamos un trinomio, en el que dos de sus términos pueden expresarse como el cuadrado de una expresión algebraica y el restante como el doble producto de sus bases, podrá expresarse como el cuadrado de un binomio.

Ejemplos:

$P(x) = 25x^2 + 10x + 1 = (5x+1)^2$

$P(x) = 36x^2 + 12x + 4 = (6x-2)^2$

Ejemplos

Ejemplo 1

Factoriza el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 6xy + 9y^2$.

solución

Escribimos el polinomio como:

$$x^2+6xy+9y^2 = \underbrace{x^2}_{a^2} + 2\underbrace{(x)}_{a}\underbrace{(3y)}_{b} + \underbrace{(3y)^2}_{b^2}$$
$$= (x+3y)^2$$

donde se identificó $x \leftrightarrow a$ y $3y \leftrightarrow b$.

Ejemplo 2

Determina si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos, en caso de que lo sean factorízalos.

a) $x^2 + 4xy + y^2$

b) $4x^4 + 20x^2 + 25$

c) $16x^2y^2z^2 + 24xyzt + 9t^2$

solución

a) $x^2 + 4xy + y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto porque el segundo término no es $2xy$.

b) El polinomio $4x^4 + 20x^2 + 25$ es un trinomio cuadrado perfecto porque podemos identificar que $a \leftrightarrow 2x^2$, $b \leftrightarrow 5$, luego:

$$4x^4+20x^2+25 = \underbrace{(2x^2)^2}_{a^2} + \underbrace{2}_{2}\underbrace{(2x^2)}_{a}\underbrace{(5)}_{b} + \underbrace{5^2}_{b^2}$$
$$= (2x^2+5)^2$$

c) El polinomio $16x^2y^2z^2 + 24xyzt + 9t^2$ también es un trinomio cuadrado perfecto. En este caso identificamos $a \leftrightarrow 4xyz$, $b \leftrightarrow 3t$. La factorización resulta

$$16x^2y^2z^2+24xyzt+9t^2 = \underbrace{(4xyz)^2}_{a^2} + \underbrace{2}_{2}\underbrace{(4xyz)}_{a}\underbrace{(3t)}_{b} + \underbrace{(3t)^2}_{b^2}$$
$$= (4xyz+3t)^2$$

Ejemplo 3

Encuentra las raíces de la ecuación $36x^2 + 48x^3 + 16x^4 = 0$.

solución

Para resolver la ecuación factorizamos primero el factor $4x^2$, luego identificamos $3 \leftrightarrow a$, $2x \leftrightarrow b$.
El proceso es el siguiente:

$$\begin{aligned} 36x^2 + 48x^3 + 16x^4 &= 4x^2(9 + 12x + 4x^2) \\ &= 4x^2(\underbrace{3^2}_{a^2} + 2\underbrace{(3)}_{a}\underbrace{(2x)}_{b} + \underbrace{(2x)^2}_{b^2}) \\ &= 4x^2(3 + 2x)^2 \end{aligned}$$

Finalmente los factores se igualan a cero para obtener las raíces $x = 0$, $x = -3/2$.

CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Recordemos que el cubo de un binomio $(x+a)^3$ es igual a la suma del cubo de las bases, más el triple producto del cuadrado de la base del primero por la base del segundo, más el triple producto del cuadrado de la base del segundo por la base del primero.

$(x+a)^3 = (x+a).(x+a).(x+a) = (x.x+ x.a +a.x +a.a).(x+a) = (x^2+ 2.x.a+ a^2)(x+a)=$
$x^2.x+ x^2.a+ 2.x.a.x+ 2.x.a.a+ a^2.x+a^2.a= x^3+3.x^2.a+3.x.a^2+a^3$.
$(x-a)^3= (x-a).(x-a).(x-a) = (x.x- x.a- a.x+ a.a).(x-a) = (x^2- 2.x.a+ a^2)(x-a)=$
$x^2.x- x^2.a - 2.x.a.x +2.x.a.a + a^2.x+a^2.a= x^3- 3.x^2.a + 3.x.a^2+ a^3. =$

Por ello si tenemos un cuatrinomio, quizás pueda ser factorizado como el cubo de un binomio.

Ejemplo:

$U(x)= 8x^3-12x^2+6x-1= (2x-1)^3$

Siendo: $8x^3 =(2x)^3$, $-1 =(-1)^3$,$-12x^2 = 3.(2x)^2.(-1)$,$6x =3 .(2x).(-1)^2$.

DIFERENCIA DE CUADRADO

Una diferencia de cuadrado es igual a la suma por la diferencia de las bases:

Sea: $x^2-a^2=(x-a).(x+a)$

Se puede comprobar aplicando propiedad distributiva para un producto de dos binomios.

Ejemplo: $V(x)=25x^2-1=(5x-1)(5x+1)$.

__**Nota:**__ No confundir diferencia de cuadrado con diferencia al cuadrado. $(x-a)^2 \neq x^2-a^2$

Ejemplos

Ejemplo 1

Factoriza la expresión $x^4 - 81y^4$.

solución

Claramente tenemos una diferencia de cuadrados, identificamos $x^2 \leftrightarrow a$, $9y^2 \leftrightarrow b$ y obtenemos

$$\begin{aligned} x^4 - 81y^4 &= (x^2)^2 - (9y^2)^2 && \text{usando diferencia de cuadrados,} \\ &= (x^2 - 9y^2)(x^2 + 9y^2) && \text{usando nuevamente diferencia de cuadrados} \\ &= (x - 3y)(x + 3y)(x^2 + 9y^2) \end{aligned}$$

FACTOREO DE UN POLINOMIO EN FUNCIÓN DE SUS RAÍCES

Para factorear un polinomio en función de sus raíces analizaremos algunos ejemplos sencillos. Dado el polinomio P(x)=x^2+x-6 encontremos sus raíces, para ello hacemos P(x)=0

x^2+x-6=0 (ecuación de segundo grado del tipo ax^2+bx+c=0) cuyas raíces se encuentran por medio de: $x_{1-2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-6)}}{2.1} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

La forma de expresar este polinomio en función de sus raíces es: (x - x_1) . (x - x_2)

También, por el Teorema General del Algebra podemos escribir el polinomio P(x) en función de sus raíces. Aplicando Ruffini

REGLA DE RUFFINI:

Esta regla solo es aplicable cuando el polinomio divisor d(x) es de primer grado y de la forma (x + a) o(x - a).

EJEMPLO : Realizar la división D8x)/d(x)

D(x) = 4x^3 + 3x^2 –x+6

d(x) = x + 2

En este caso el cociente obtenido es de un grado menor que el del dividendo

Los coeficientes del dividendo completo y ordenado →

El opuesto del termino independiente del divisor es →

Los coeficientes del cociente son →

	4	3	-1	6
-2		-8	10	18
	4	-5	9	-12

Resto

Se calculan los coeficientes del cociente de la siguiente manera:

4 es el coeficiente del término que determina el grado del cociente(x^2) y coincide con el primer término del dividendo, el resto de los coeficientes se determina realizando la operación indicada por las flechas en el esquema anterior

-5 =(-2.4)+3, es el coeficiente de x

9=(-2.-5)-1, es el término independiente

-12 es el resto.

El cociente entre D(x)/d(x)=C(x)=4x^2-5x+9 con un resto igual a –12.

Ejemplo:

Simplifique la expresión racional $\dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$.

Solución Factorizamos el numerador y el denominador y cancelamos los factores comunes usando la propiedad de cancelación *i*):

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{(2x + 1)\cancel{(x - 1)}}{(x + 1)\cancel{(x - 1)}} = \frac{2x + 1}{x + 1}.$$

≡

Observe que en el ejemplo 1 la cancelación del factor común $x - 1$ es válida solamente para los valores de x tales que $x - 1$ sea diferente de cero; es decir, para $x \neq 1$. Sin embargo, como la expresión $(2x^2 - x - 1)/(x^2 - 1)$ no se define para $x = 1$, nuestra simplificación es válida para todos los números reales en el dominio de la variable x en la expresión *original*. Hagamos énfasis en que la ecuación

$$\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

no es válida para $x = 1$, aunque el miembro derecho, $(2x + 1)/(x + 1)$, se define para $x = 1$. Las consideraciones de esta naturaleza serán importantes en el capítulo próximo, cuando resolvamos ecuaciones que contengan expresiones racionales.

En el resto de este capítulo supondremos sin comentarios posteriores que las variables están restringidas a los valores para los que todos los denominadores en una ecuación sean diferentes de cero.

Advertencia

ACTIVIDAD 1

Factorizar las siguientes expresiones (Hasta donde sea posible):

1. $16x^5-20x^4+12x^2=$
2. $2x^3-2x^2+x-1=$
3. $-1-2x+x^2+2x^3=$
4. $x^3+3x^2 y+3xy^2+y^3=$
5. $-x^2+100=$

Actividad 2

Factorice los siguientes polinomios en función de sus raíces.

1. $x^3+3x^2+2x=$
2. $x^3+2x^2-5x-6=$
3. $3x^2+6x-9=$
4. $2x^2-6x=$

Actividad 3

Halla la opción que contiene la simplificación de $\dfrac{12x^3-28x^2-5x}{4x^2-4x-15} \times \dfrac{15x^2+x-2}{18x^2-3x-1}$

a) $\dfrac{3x+1}{2x^2+3}$

b) $\dfrac{5x^2+2x}{2x+3}$

c) $\dfrac{3x^2+x}{4x+1}$

d) $\dfrac{2x-1}{3x+2}$