SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES

ÁNGULOS
Signo de un ángulo

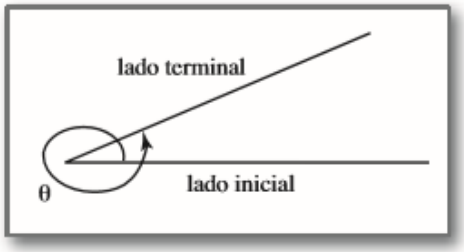


Figura 5.5a θ positivo

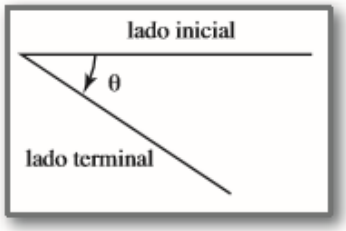


Figura 5.5b θ negativo

Terminología	Definición	Ejemplos
Ángulo llano θ.	$\theta = 180°$ (media rotación).	180°
Ángulo agudo θ.	$0° < \theta < 90°$	15°; 39°; 87°
Ángulo obtuso θ.	$90° < \theta < 180°$	102°; 98°, 176°
Ángulos complementarios α, β	$\alpha + \beta = 90°$	30° y 60°; 53° y 37°; 12° y 78°
Ángulos suplementarios α, β	$\alpha + \beta = 180°$	117° y 63°; 17° y 163°

✓ SISTEMA SEXAGESIMAL

El Sistema sexagesimal es un **sistema de numeración** en el que cada unidad se divide en 60 unidades de orden inferior, es decir, es un sistema de numeración en base 60. Se aplica en la actualidad a la medida del tiempo y a la de la amplitud de los ángulos.

Grados sexagesimales

La unidad es el grado sexagesimal (º)

Este sistema admite submúltiplos:

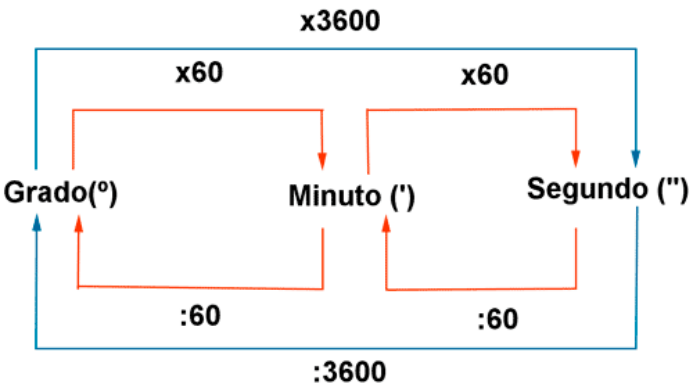
- Un grado equivale a 60 minutos:

1º = 60 ’

- Un minuto equivale a 60 segundos:

1’ = 60”

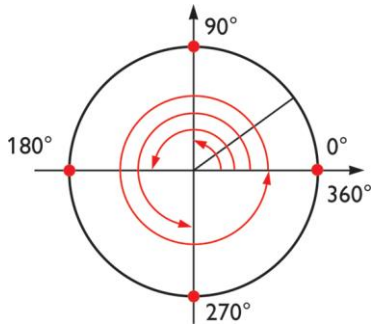
Equivalencias



Tiempo

1 h ⟶ 60 min

1 min ⟶60 s



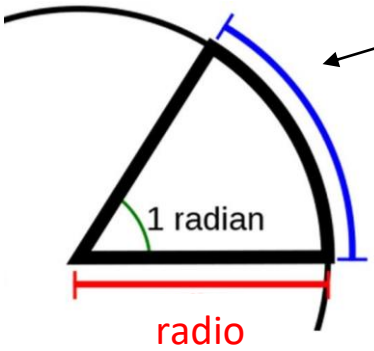
La unidad de medida angular de un grado sexagesimal es igual a la noventava parte de un ángulo recto, por consiguiente, el grado sexagesimal, como unidad del sistema de medida de ángulos sexagesimal, está definido partiendo de que un ángulo recto tiene 90° (90 grados sexagesimales), y sus divisores, el minuto sexagesimal y el segundo sexagesimal, están definidos del siguiente modo:

1 ángulo recto = 90° (grados sexagesimales).
1 grado sexagesimal = 60' (minutos sexagesimales).
1 minuto sexagesimal = 60" (segundos sexagesimales).

- ✓ **SISTEMA CIRCULAR O RADIAL**

Se denomina **radian** al ángulo que se forma cuando la longitud del arco barrido es igual al radio de la circunferencia.
En general cuando decimos, que un ángulo es igual a n radianes, se quiere expresar con ello, que es el ángulo central que corresponde a un arco de n radianes.
Como la circunferencia tiene una longitud de 2 π r .Si r=1, resulta que la longitud de la circunferencia, expresadas en radianes es igual a 2 π radianes, o sea el ángulo central total de 360º en el sistema sexagesimal, es igual a 2 π radianes.
Adoptado como unidad el ángulo de 1 radián se tienen las siguientes medidas:

- un ángulo de 1 giro = 2 π
- un ángulo de 2 giro = 2 .2 π = 4 π
- un ángulo de k giro = k .2 π = 2k π
- un ángulo llano = π
- un ángulo recto = $\frac{\pi}{2}$



$$Radianes = \frac{Grados.\pi}{180°}$$

$$Grados = \frac{Radianes.180}{\pi}$$

CORRESPONDENCIA ENTRE LOS DOS SISTEMAS ANTERIORES

Podemos establecer una correspondencia entre los dos sistemas partiendo de lo expresado en el párrafo anterior.

360° ——— 2π rad.

α° ——— x rad. $\longrightarrow$ $x\ rad = \dfrac{\alpha°.2\pi\, rad.}{360°}$

Ejemplo: Expresar 45º en el sistema radial.

$$x\, rad. = \frac{45°\, 2\pi\, rad.}{360°} = \frac{\pi}{4} rad$$

Ejemplo: Expresar 1 radian en grados sexagesimales.

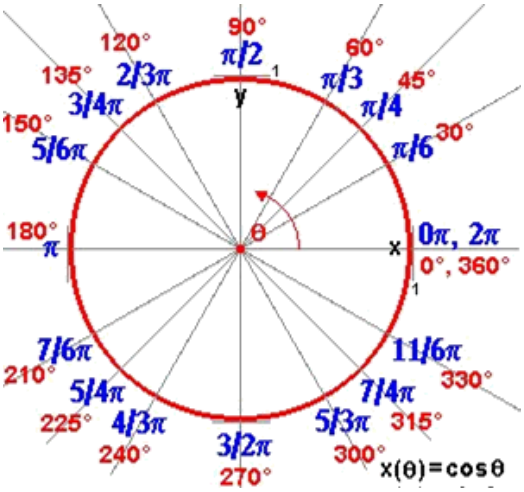
2π rad. ——— 360°

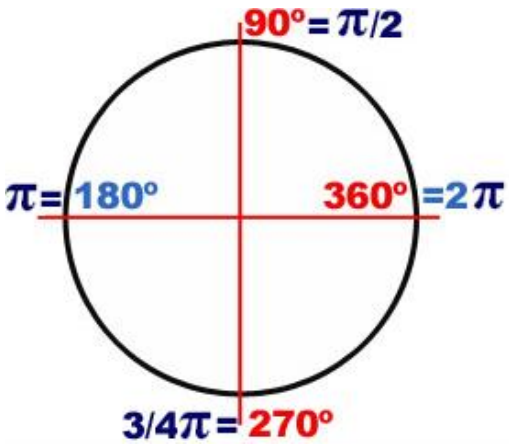
1 rad. ——— x° $\longrightarrow$ $x° = \dfrac{1 rad.360°.}{2\pi\ rad} = 57°\ 17'\ 44{,}8''$

De igual manera se puede establecer una tabla que relaciona los ángulos más comunes en ambos sistemas.

Sis. Sexagesimal	Sis. Radial
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$
150°	$5\pi/6$
180°	π
270°	$3\pi/2$
360°	2π

GRÁFICO DE EQUIVALENCIA ENTRE LOS DOS SISTEMAS





Ángulo (en grados)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo (en radianes)
90°	90 es la mitad de 180	Si se divide180 entre 2, también se divide π entre 2. $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{2}$
60°	60 es un tercio de 180	Si se divide 180 entre 3, también se divide π entre 3. $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{3}$
45°	45 es un cuarto de 180	Si se divide 180 entre 4, también se divide π entre 4. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{4}$
30°	30 es un sexto de 180	Si se divide 180 entre 6, también se divide π entre 6. $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{6}$
120°	120 es dos tercios de 180	Si se multiplica 180 por 2/3, también se multiplica π por 2/3 $\frac{2}{3} \cdot \pi$	$\frac{2\pi}{3}$
270°	270 es tres medios de 180	Si se multiplica 180 por 3/2, también se multiplica π por 3/2 $\frac{3}{2} \cdot \pi$	$\frac{3\pi}{2}$
1°	1 es un ciento ochentavo de 180	Si se multiplica 180 por 1/180, también se multiplica π por 1/180 $\frac{1}{180} \cdot \pi$	$\frac{\pi}{180}$

La última fila de la tabla se usa para convertir cualquier ángulo medido en grados a radianes.

De manera similar, es posible convertir ángulos medidos en radianes a grados. Para esto, estúdiense los siguientes ejemplos:

Ángulo (en radianes)	Razonamiento	Cálculos	Ángulo (en grados)
$\frac{2\pi}{3}$	Dos tercios de π	$\frac{2}{3} \cdot 180$	120°
7π	7 veces π	(7)180	1260°
1	Se tiene que π = 180°. Divídase cada lado de la igualdad por π.	180 ÷ π	$\left(\frac{\pi}{180}\right)^{\circ}$

La última fila de la tabla anterior nos da una equivalencia útil en la conversión de radianes a grados.

$$1 \text{ rad} = \frac{180^{\circ}}{\pi}$$

ACTIVIDAD 1

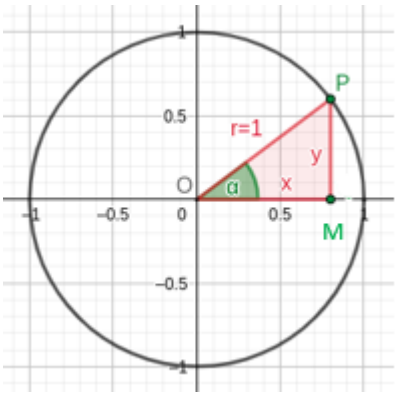
Encuentre la relación que:

1. Vincule el sistema sexagesimal con el circular para expresar en radianes lo siguientes ángulos: 57º 16’ y 114º 26’ 12”
2. Vincule el sistema radial con el circular para expresar en grados sexagesimales 1/6 radianes y 0.35 radianes.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las relaciones trigonométricas es la razón entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo. Son seis y reciben el nombre de: seno, coseno, tangente, cotangente secante y cosecante. Estás, tienen como variable independiente un ángulo. Este ángulo que denotaremos como α, puede estar expresado en grados o en radianes. Más adelante analizaremos algunos sistemas de medición de ángulos.

Para definir relaciones trigonométricas consideremos un sistema de ejes coordenados, el radio vector y el ángulo que forma este con el eje de abscisas (x).



r=radio vector = magnitud del segmento $\overline{OP}$, determinando el extremo de radio vector el punto P(x,y), **x** es la abscisa del punto e **y** la ordenada del punto, α es el ángulo que forma el radio vector ρ con el eje horizontal x.

Para este radio vector nos quedaran las dos primeras funciones definidas anteriormente como:

$\operatorname{sen}\alpha = cateto\ opuesto = \overline{PM}$ =y

$\cos\alpha = cateto\ adyacente = \overline{OM}$ =x

Observa que con el radio vector, la ordenada y la abscisa del punto queda determinado un triángulo rectángulo, donde:

ρ = radio vector =hipotenusa del triángulo.

x= abscisa = cateto adyacente al ángulo α

y= ordenada = cateto opuesto al ángulo α

Mediante cocientes entre estos tres segmentos **se definen** las siguientes funciones trigonométricas del ángulo:

Relaciones trigonométricas principales

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{\rho} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Relaciones trigonométricas secundarias o co-funciones

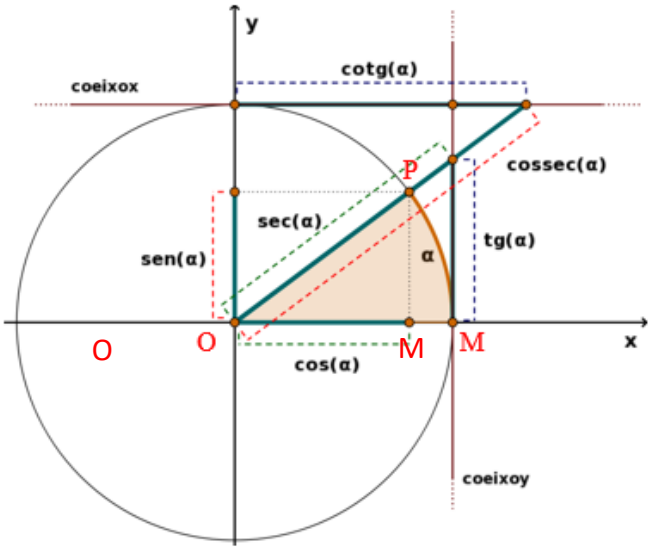
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\rho}{y} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{\rho}{x} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{cateto\ \ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

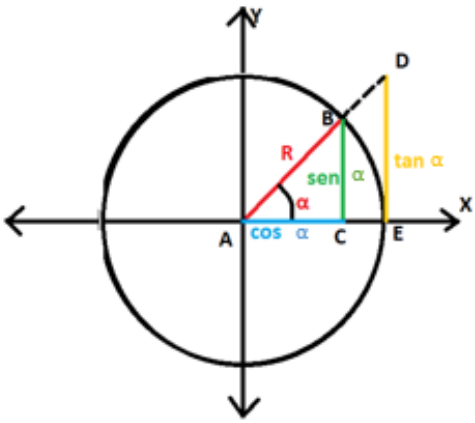
Importante: Si te fijas en tu calculadora en ella solo aparecen las tres primeras funciones o funciones principales. Las otras tres llamadas co-funciones las tendrás que obtener a partir de las principales utilizando la última igualdad de la definición anterior.

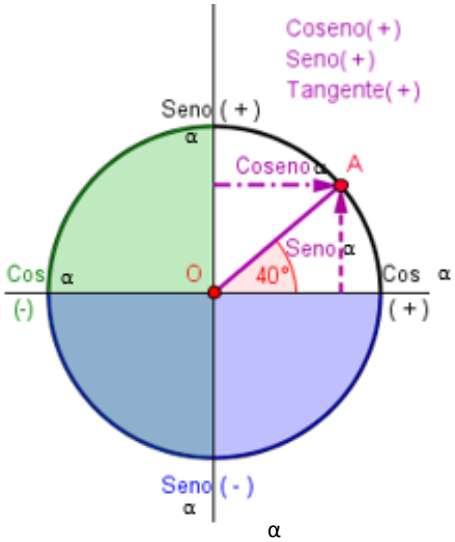
Tracemos una circunferencia trigonométrica con centro en el origen de coordenadas y radio $\rho = 1$



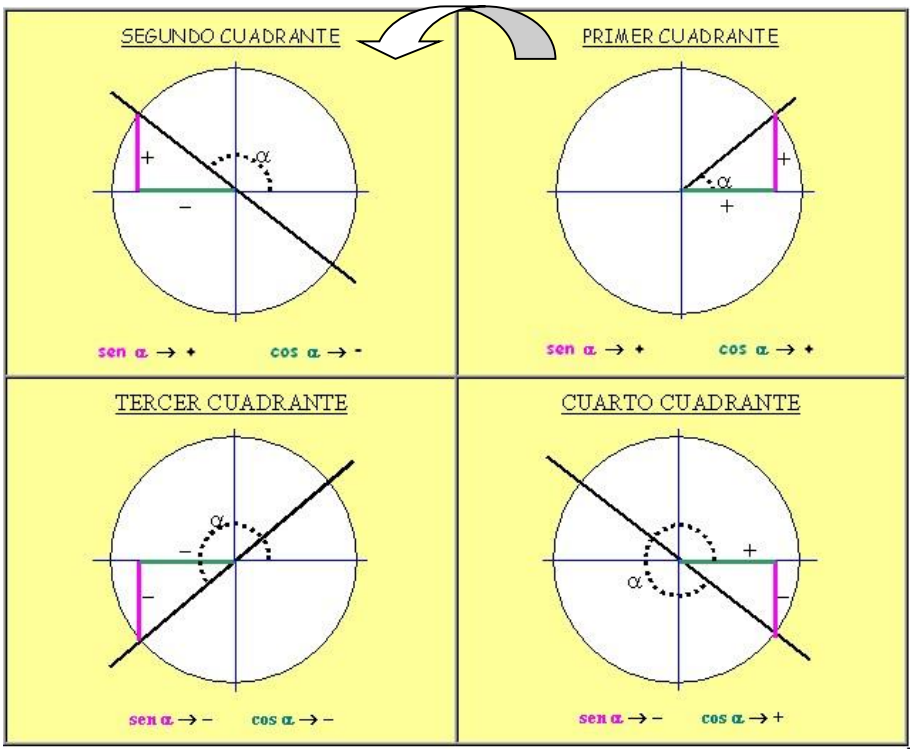
En función de los lados de un triángulo ubicado en una circunferencia trigonométrica. Según el cuadrante donde se encuentre el ángulo, serán los signos de las funciones trigonométricas que tendrán que ver con los signos de la abscisa o de la ordenada. α

GRÁFICO DE LOS SEGMNETOS TRIGONOMÉTRICOS PARA UN ÁNGULO PERTENECEINTE AL PRIMER CUADRANTE





SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA SEGÚN EL CUADRANTE



Cuadrante	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Actividad 5

Complete la siguiente tabla utilizando la calculadora y coloque el signo correspondiente según el cuadrante del ángulo:

Función	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Seno α								
Coseno α								
Tangente α								
Cotangente α								
Secante α								
Cosecante α								

Actividad 1

1. A) Dados los puntos A(2,4) y B (-1,3). Calcule el ángulo $X\hat{O}A$ Y $X\hat{O}B$ Usando las relacion trigonometrica adecuada.

B) Una vez calculados los ángulos, calcule el sen X$\hat{O}$A Y el cos X$\hat{O}$B.

2. Al aplicar las condiciones de equilibrio de unaviga cargada se obtienen las siguientes ecuaciones

a)$\sum F_x = 0 = F_1 . cos \propto + H + R_{ax}$

b) $\sum M_A = 0 = -F_1 . sen \propto .1m + F_2 . 2m + Q . 3{,}5m - R_{b.} . 4m$

c) $\sum M_A = 0 = -F_1 . sen \propto .5m + F_2 . 2m + R_{ay} . 4m - Q . 0{,}5m$

Sabiendo que:

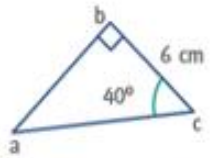
$F_1 = 3t$ $F_2 = 2t$ Q= 3t H= 1t α=45°

Calcular : R_{ay} R_{ax} $R_{b.}$

Actividad 2

1. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos

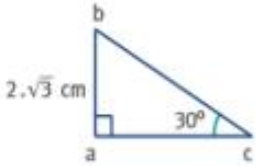
a.



$\hat{a}$ = ☐ $\overline{ab}$ = ☐

$\overline{ac}$ = ☐

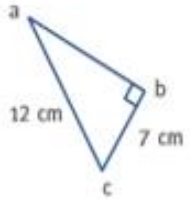
b.



$\hat{b}$ = ☐ $\overline{bc}$ = ☐

$\overline{ac}$ = ☐

c.



$\hat{a}$ = ☐ $\overline{ab}$ = ☐

$\hat{c}$ = ☐

Respuestas:

a-

$\hat{a}$ = 50° $\overline{ab}$ = 5,03 cm

$\overline{ac}$ = 7,83 cm

b-

$\hat{b}$ = 60° $\overline{bc}$ = 6,93 cm

$\overline{ac}$ = 6 cm

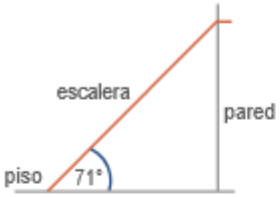
c-

$\hat{a}$ = 35° 41' 7" $\overline{ab}$ = 9,75 cm

$\hat{c}$ = 54° 18' 53"

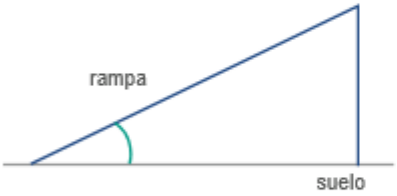
2. Lee atentamente y resuelve

a. Una escalera de 5,5 cm se apoya en una pared formando un ángulo con el piso de 71°. ¿A qué altura de la pared llega la escalera?



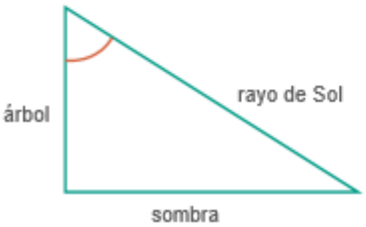
5,20 m

b. Se debe colocar una rampa de 2,8 m de largo para facilitar el acceso a un edificio cuya entrada se encuentra a 1,2 m de altura. ¿Qué ángulo forma la rampa con el suelo?



25° 22' 37"

c. La sombra de un árbol que mide 3,5 m a cierta hora del día es de 6,2 m. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con el árbol?



60° 33' 16"

d. Una escalera mide 225 cm de longitud. Cuando está totalmente abierta, la distancia entre el pie de la escalera con su soporte es de 98 cm. ¿A qué altura se encuentra el extremo superior de la escalera?

2,20 m

BIBLIOGRAFÍA:

- **ALGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA** -Tercera edición 2012- Dennis G. Zill Jacqueline M. Dewar
- **PRE-CÁLCULO GRÁFICO, NUMÉRICO, ALGEBRAICO**- Demana Waits Foley Kennedy- Séptima Edición - Editorial Pearson.
- **PRECÁLCULO ENFOQUE DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS** - Editorial Pearson- Prado - Santiago Aguila- Rodriguez -Quezada - Gomes –Ruiz- Florido.
- **ACTIVADOS 1 MATEMÁTICA** -Puertos de Palo – Año 2013